

## 構造解析のための有限要素変位法についての Q&A

### 1. 有限要素法とは？

**質問 1.1:** 簡単に言えば、有限要素法とはどのようなものであり、他の解析法とはどのように異なるのですか？

**回答 1.1:** 地盤や鋼やコンクリート構造物は細かい粒子の集合体であり、一般に連続体と呼ばれています。水圧や地震荷重のような外力が作用したときに連続体の内部に働く応力の解析は、微小要素についての釣り合い条件、変形とひずみの連続性を保つための適合条件を表す支配方程式を構造物の境界における力学的および幾何学的条件の下に解かなくてはなりません。一般的な支配方程式は微分方程式になり、極く限られた形状の問題（はりや柱など）を除けば、厳密に解くのは非常に難解と言わねばなりません。そこで、古来いろいろな近似解法が試みられてきました。たとえば、微分方程式の近似解法である“差分法”や、変位分布や応力分布を簡単な関数で仮定して、エネルギー原理を利用して近似解をもとめる“エネルギー法”などがあります。

有限要素法は解析しようとする連続体を有限個の微小な要素の集合体と考え、各要素内の変形分布を簡単な関数で仮定して、要素間および構造全体の釣り合い条件を満足するような解を求める方法であり、“エネルギー原理”による近似解法に属します。したがって、有限要素法は、連続体の無限微小要素に関する微分方程式の解を求めるのではなく、連続体を有限長の微小要素の集合体と考え、各要素のつりあい条件を連立一次方程式の解によって表し、コンピュータの利用により近似解を求めることに最大の特徴があると言えます。

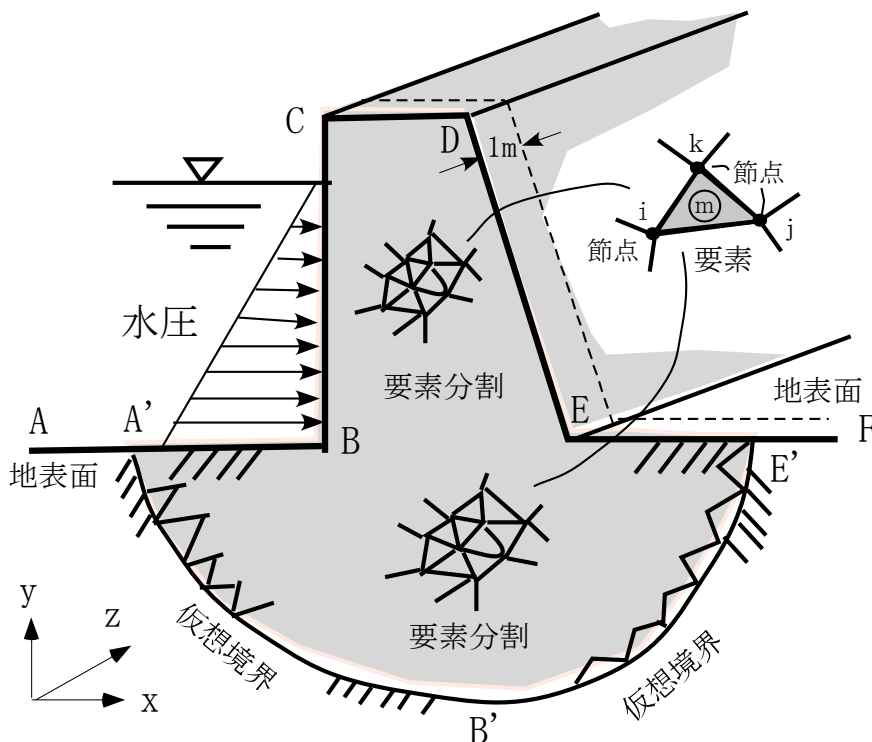


図 1.1 アースダムに働く応力

**質問 1.2:** 有限要素変位法とは何ですか？一般に使われている有限要素法とは違うのですか？

**回答 1.2:** 詳しく言いますと、有限要素法には、変位法、応力法および混合法があります。変位法

は適合条件を満足する変位場を設定して、釣り合い条件に解を求める方法で、応力法は釣り合い条件を満足する応力場を設定して、適合条件より解を求める方法で、混合法は両者をミックスした方法であります。変位法が最もよく使われており、一般には、有限要素法は有限要素変位法を指しています。

**質問 1.3:**有限要素法の手順を簡単に教えてください。

**回答 1.3:**FEM 解析の基本的な手順はどのような構造問題に対しても同じです。ここでは、図 1.1 に示すような水圧を受けるアースダムの堤内に働く応力の大きさを求める問題を例にとって説明します。

まず、解析対象領域（図 1.1 の色を付けた部分）を多数の小さな領域（三角形でも四角形でも良いが境界辺を含むようにする）に分割します。各境界の頂点（黒丸を付けたところ）を節点と言い、隣接する要素は節点を共有します。

つぎに、各要素内の変位分布を簡単な関数（変位関数または補間関数と呼ぶ）で仮定します。この関数は要素の形状が変わっても使える共通する単純な関数であることが慣用であり、各要素の節点に働く変位ベクトルと力のベクトルを結びつける剛性行列（要素剛性行列という）を作成します。

ついで、すべての要素についての要素剛性ベクトルを集合して、全節点に作用する変位ベクトルと力のベクトル（荷重ベクトルに対応する）を結びつける全体剛性行列を作り、境界辺の節点での変位条件を考慮して、構造全体のつりあい条件を意味する剛性方程式を作ります。この剛性方程式は全節点の変位に関する連立一次方程式になり、これを解いて各節点の変位成分と要素内の応力分布を順次求めて行きます。以上の手順は図 1.2 のようになります。

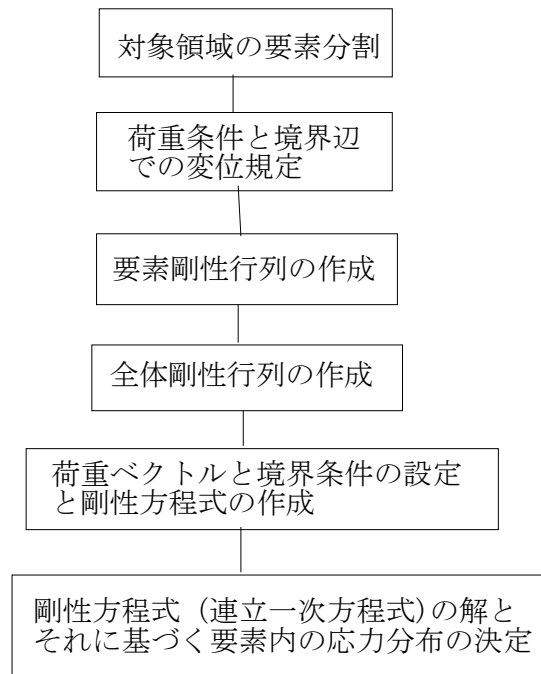


図 1.2 有限要素変位法の手順

**質問 1.4 :**アースダムは3次元体であるので3次元解析が必要であるのですか？

**回答 1.4 :**もし、堰堤が変断面であったり、堰堤の高さ( $h_0$ )や水面の高さ( $h_w$ )が堰堤の軸方向に変化するようなケースでは3次元問題になりますが、堰堤が等断面で、 $h_0$ および $h_w$ が堰堤の軸方向に一定であり、かつ断面寸法に比べて堰堤が十分に長い場合には、どの断面でも応力状態が同じになり、単位長さ (1m) の奥行きを持つ平面構造として2次元問題（正確には平面ひずみ問題（後述します））として取り扱うことができます。

**質問 1.5 :**堰堤と地盤は一体化しているので、地面の深さが無限に広がっている問題（半無限体）として解析しなければいけないのですか？

**回答 1.5 :**確かに地盤を含む問題はこのような地表面で境界付けられた半無限連続体の問題になりますが。有限要素法では、このような半無限問題は取り扱えません。それゆえ、有る程度の深さ以上の地盤の影響が小さく無視できる場合には、図 1.1 に示すような仮想境界を設けて、境界点の節点に適切な変位条件（たとえば、静定問題では回転ヒンジやバネ支持、動的問題では粘性境界などを適用）を導入して、解析領域を有限領域にする必要があります。

## 2. FEM 解析法の適用性と留意点について

**質問 2.1 :**FEM 解析が適用できる構造問題はどのようなものですか？

**回答 2.1 :**今日では、ほぼすべて構造解析の問題に適用できると思います。FEM 解析はコンピュ

一タの発展とともに進化したもので、初期の頃は、コンピュータの出現以前に開発されてきた、基礎微分方程式の近似解法と密接に結びついていました。レリー・リッツ法のようなエネルギー原理に基づく近似解法は、コンピュータの出現によって、多変数の問題に適用できるようになり、FEM変位法はその発展したものと見なすこともできます。

今日の構造解析の問題は、骨組構造、平板およびシェル構造の静的弾性および弾塑性をはじめ、振動、衝撃、地震応答などの動的解析からクリープや温度解析のような時間依存性の解析など多岐にわたっています。また、解析対象も構造物のみならず、岩盤や地盤など含まれており、それらに適用する汎用ソフトも多数開発されています。したがって、取り扱う材料も弾性体から、弾塑性体、粘性体にモデル化して適用されていますが、ここでの解説は、線形弾性体のみ限定しております。

**質問 2.2** 有限要素法の理解に必要な最小限の基礎知識を教えてください。

**回答 2.2** 有限要素法の定式化を理解するには、**回答 1.1** で述べたエネルギー原理に基づく構造解析手法の他に、行列演算に関する初等的な知識が必要です。以下、これらを極く簡単に説明します。

行列とは、多数の要素を行と列に配列したもので、通常、**A, B, C, .....** のように肉太文字で表します。たとえば、3行3列の行列**A**は以下のように9個の要素から成り立ちます。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

一列または一行のみの行列をベクトルと呼び、以下のように表します。

$$\mathbf{B} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3], \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T \quad (2.2)$$

ここに、行列の右肩の付けた**T**は行と列を入れ替えた転置行列を意味しています。

行列の演算については、たとえば、**D**と**E**の加減算では、**D**と**E**の行数と列数がそれぞれ同じでなければならず、それらの和：**F = D ± E**は各要素の和または差であり、以下のようになります。

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \pm e_{11} & d_{12} \pm e_{12} & d_{13} \pm e_{13} \\ d_{21} \pm e_{21} & d_{22} \pm e_{22} & d_{23} \pm e_{23} \\ d_{31} \pm e_{31} & d_{32} \pm e_{32} & d_{33} \pm e_{33} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

行列の積は、たとえば**G = HL**を実行するには、**H**の列数と**L**の行数が一致していなければならない、たとえば、**H**が**m**行**k**列、**J**が**k**行**n**列とすれば、**G**は**m × n**の行列になり、その要素  $g_{ij}$  は以下のようになります。

$$g_{ij} = \sum_k h_{ik} l_{kj} = h_{i1} l_{1j} + h_{i2} l_{2j} + h_{i3} l_{3j} + \dots \quad (2.4)$$

すなわち、**G**の行数は**H**の行数に、**G**の列数は**J**の列数に一致します。たとえば、

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ l_{31} & l_{33} \end{bmatrix} \text{とすれば,}$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{HL} = \begin{bmatrix} h_{11}l_{11} + h_{12}l_{21} + h_{13}l_{31} & h_{11}l_{12} + h_{12}l_{22} + h_{13}l_{32} \\ h_{21}l_{11} + h_{22}l_{21} + h_{23}l_{31} & h_{21}l_{12} + h_{22}l_{22} + h_{23}l_{32} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

となります。すなわち、**H**が**m**行**p**列の行列、**L**が**p**行**n**列の行列とすれば、**m**行**n**列の行列**G**の要素  $g_{ij}$  は以下のように与えられます。

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^p h_{ik} l_{kj} \quad (2.6)$$

行列の割算はありませんが，正方行列については逆行列が存在します．たとえば，正方行列  $\mathbf{A}$  の逆行列を  $\mathbf{A}^{-1}$  としますと，逆行列は以下のように定義されます．

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (2.7)$$

ここに，

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$\mathbf{I}$  は単位行列と呼ばれており，式(2.1)の3行3列  $\mathbf{A}$  の逆行列  $\mathbf{A}^{-1}$  の演算は以下のようになります．

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{a} \, \mathbf{dAdj} \quad (2.9)$$

ここに， $|\mathbf{A}|$  は行列式と呼ばれ， $|\mathbf{A}| \neq 0$  の条件の下で逆行列  $\mathbf{A}^{-1}$  が存在します．3行3列の行列式  $|\mathbf{A}|$  は，以下のように展開できます．

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{31} \quad (2.10)$$

また， $\mathbf{adjA}$  は余因子行列と呼ばれ，以下のように与えられます．

$$\mathbf{adjA} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \quad \text{以下同様に, } A_{21} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32},$$

$$A_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, \quad A_{23} = a_{21}a_{32} - a_{23}a_{31}, \quad A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22},$$

$$A_{32} = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}, \quad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

なお，逆行列の一般的な計算法については専門書を参照してください．

ところで，FEMによる応力解析では，応力やひずみはベクトル形式で表される．たとえば，2次元問題では，

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

弾性則は以下のように表されます．

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.13)$$

ここに， $\mathbf{C}$  は弾性係数行列であり，後述する平面応力問題では，

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad E : \text{弾性係数 (ヤング率)}, \quad \nu : \text{ポアソン比} \quad (2.14)$$

となり，ひずみエネルギー密度  $W$  は

$$W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (2.15)$$

と表され、 $U$  はスカラー量になり、式(2.13)を考慮すると、

$$W = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.16)$$

ここに、 $\mathbf{C}$  は対称行列であるので、 $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$  となります。

FEM 解析では、仮想仕事の原理が重要な役割を演じます。仮想仕事の原理とは、一つの物体に作用する外力  $\bar{\mathbf{P}}$  と内力  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  は釣り合い条件を満足し、外力の作用点の変位  $\bar{\mathbf{U}}$  と内部ひずみ  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  は適合条件を満足しておれば、それらの積を表す外力の成す仕事の総和と内力の成す仕事の総和が同一になることを意味し、式で表すと以下のようになります。

$$\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{U}} = \int \bar{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (2.17)$$

ここに、積分は物体の全域にわたって実行します。もちろん、実際に発生する応力  $\boldsymbol{\sigma}$  やひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は釣り合い条件や適合条件を満足しているので、式(2.16)を書き換えれば、

$$\bar{\mathbf{P}}^T \bar{\mathbf{U}} = \int \boldsymbol{\sigma}^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dv \quad \text{または} \quad \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{U} = \int \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (2.18)$$

前者は仮想変位の原理、後者は仮想力の原理と呼ばれ、仮想変位と仮想力の任意性を利用して、内力と外力の釣り合い条件や変形の適合条件を満足させる時にしばしば用いられます。たとえば、 $\bar{\mathbf{P}} = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]^T$  のように、 $i$  番目の要素のみが 1.0 で他の要素が 0 であるような単位ベクトルに採ると、式(2.17)の第 2 式より、 $\mathbf{U}$  の  $i$  番目の要素  $U_i$  は

$$U_i = \int \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (2.19)$$

また、 $\bar{\mathbf{U}} = [0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0]^T$  とすれば、式(2.17)の第 1 式より、 $\mathbf{P}$  の  $i$  番目の要素  $P_i$  は

$$P_i = \int \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dv \quad (2.20)$$

を与え、前者は単位荷重法、後者は単位変位法として知られており、特定位置の変位や力を求める式として利用されています。具体的には、後述の剛性行列を求める場合などを参照してください。

**質問 2.3 :** 構造解析に用いる FEM 要素にはどのような形状のものがあるのですか？

**回答 2.3 :** FEM 要素は、はりや柱部材やそれらを組み合わせた骨組構造に適用する“線要素 (1 次元要素)”，板、壁やシェル構造に適用する“2 次元要素”，ならびにブロックのような物体の解析

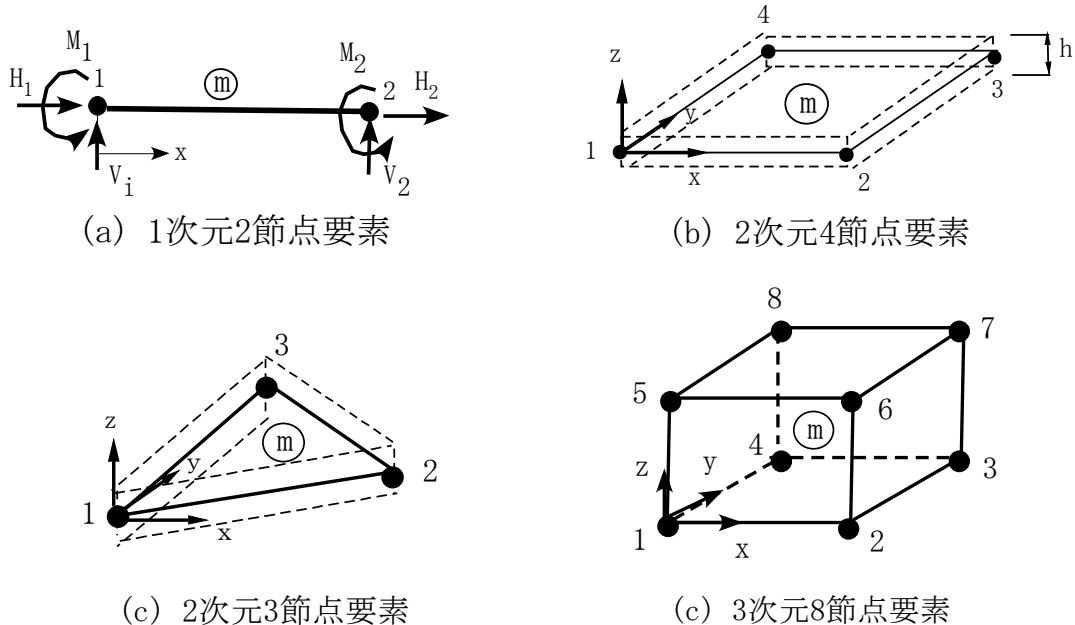


図 2.1 各種の要素形状

に適用する“3次元要素”に分けることができます。図 2.1 にはそれらの概要を示します。“1次元要素”は節点が1軸方向のみに配置する要素であり、骨組部材に適用した場合は、節点力は軸方向力 ( $H_1, H_2$ )、軸直角方向力 ( $V_1, V_2$ ) およびモーメント ( $M_1, M_2$ ) の6個であり、対応する節点変位は軸方向変位 ( $u_1, u_2$ )、軸直角方向変位 ( $v_1, v_2$ ) および回転角 ( $\theta_1, \theta_2$ ) になります。

前述の図 1.1 に示したような  $x-y$  平面に垂直な軸 ( $z$  軸) 方向の応力またはひずみのどちらかがゼロである場合は“面内問題”と呼ばれ、節点が  $x, y$  軸方向に配置している2次元要素を用い、節点力と節点変位は  $x, y$  方向の力 ( $H_i, V_i$ ) と変位 ( $u_i, v_i$ ) になります。また、平板やシェル問題のように  $x-y$  平面に直角方向 ( $z$  軸方向) の力と変位 (たわみ) が発生する場合には、“面内問題”に加えて、 $z$  軸方向の力および  $x, y$  軸回りのモーメントが発生する“面外問題”が連成することになり、図 2.1(b) の2次元4節点要素の場合は、節点変位および節点力はそれぞれ20個の変数から構成されることになります。

また、節点が  $x, y, z$  の3軸方向に配列している要素は“3次元要素”であり、最小節点数の3次元要素は四面体要素であります。3次元要素は、主としてブロック状の物体の解析に適用されます。この場合の節点力と節点変位は1節点について  $x, y, z$  軸方向の力と変位になり、図 2.1(c) の3次元8節点要素では一つの要素内の変位を表す関数は24個の自由度を持つことになります。さらに、詳しくは、後述します。

### 3. 骨組み構造に対する FEM 要素について

**質問 3.1** 骨組み構造とはどのようなものを指すのですか？

**回答 3.1** 骨組み構造とははりや柱などの棒部材を組み合わせた構造です。棒部材に働く内力は曲げモーメント  $M_x$ 、軸力  $N_x$  やせん断力  $S_x$  などの断面力ですが、断面力に対応する断面ひずみには、曲率  $\phi_x$ 、軸ひずみ  $\epsilon_x$  やせん断ひずみ  $\gamma_x$  がありますが、問題によって、 $\phi_x$  のみを考慮する場合 (曲げ問題)、 $\epsilon_x$  のみを考慮する場合 (トラス構造のような軸変形問題) や  $\phi_x$  と  $\epsilon_x$  を考慮する問題や  $\phi_x$ 、 $\epsilon_x$  および  $\gamma_x$  を同時に考慮する問題などがあり、それぞれ定式化が異なります。

**質問 3.2:** はりや柱などの棒部材にはどのような要素を用いるのですか？

**回答 3.2** 基本的には線要素を用います。図 3.1a, b は、はりの曲げ問題での2点要素および3点要素を示しています。2点要素の変位成分は鉛直方向のたわみ  $v_1, v_2$  およびたわみ角  $\theta_1, \theta_2$  です。ま

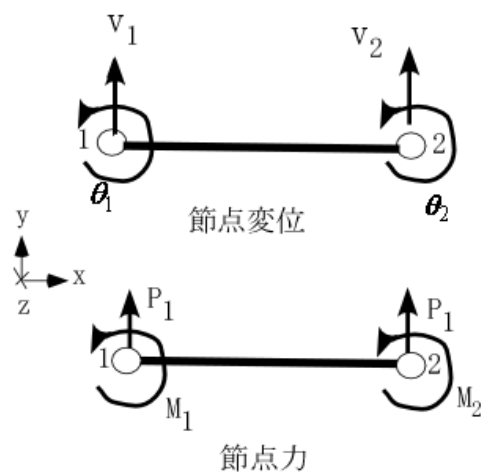


図 3.1(a) 2節点要素

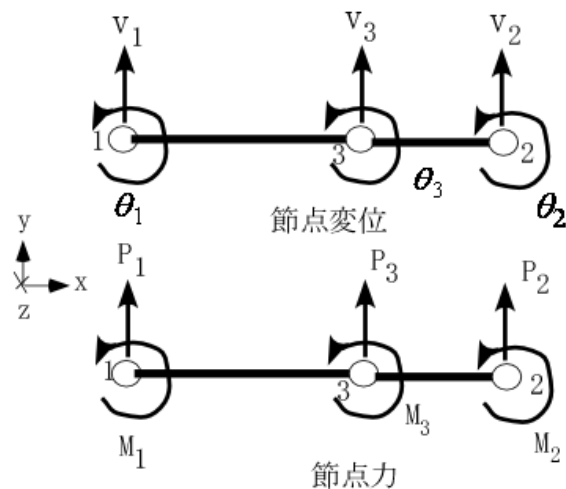


図 3.1(b) 3節点要素

た、3点要素では $v_1, v_2, v_3$ および $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ となります。また、節点変位に対応する節点力は図3.1(a),(b)に示すような、鉛直力： $P_1, P_2, P_3$ およびモーメント： $M_1, M_2, M_3$ のようになり、節点変位および節点力との正の方向は座標軸 $(x, y)$ および $x-y$ 平面に垂直な方向 $z$ の正の方向に合わせて表現します（この約束は行列演算において非常に大切であります）。

節点変位ベクトルを $\mathbf{u} = [v_1 \ v_2 \ \theta_1 \ \theta_2]^T$ 、または $\mathbf{u} = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T$ 、ここに $T$ は転置を意味する。とし、節点力ベクトルを $\mathbf{P} = [P_1 \ P_2 \ M_1 \ M_2]^T$ 、または $\mathbf{P} = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ M_1 \ M_2 \ M_3]^T$ とすれば、要素に関するつりあい条件式は以下のように表せます。

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (3.1)$$

ここに、 $\mathbf{K}$ は4行4列、または6行6列の正方向列であり、要素行政行列と呼んでいます。なお、要素行列の求め方について後述します。

つぎに、柱のように、曲げ変形と軸変形が混在する問題では、軸力と軸変位の関係を式(2.1)に付け加えます。すなわち、軸方向の節点変位を $u_i$ 、軸方向の節点力を $N_i$ とし、

$$\mathbf{P}' = \mathbf{K}'\mathbf{u}' \quad (3.2)$$

ここに、

$$\mathbf{u}' = [u_1 \ u_2 \ v_2 \ v_2 \ \theta_1 \ \theta_2]^T, \text{ または}$$

$$\mathbf{u}' = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]^T,$$

$$\mathbf{P}' = [N_1 \ N_2 \ P_1 \ P_2 \ M_1 \ M_2]^T, \text{ または}$$

$$\mathbf{P}' = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ P_2 \ P_2 \ P_3 \ M_1 \ M_2 \ M_3]^T$$

$\mathbf{K}'$ は6行6列または9行9列の正方向列となります。なお、ベクトル $\mathbf{u}'$ と $\mathbf{P}'$ の中の要素の配列については、それらの内積： $\mathbf{P}'^T \mathbf{u}'$ が仕事（エネルギー）に対応するように各要素が配列されていなければなりません。

以下、2節点要素を中心にして説明しますが、3節点要素の場合もベクトルと行列のサイズが異なるのみで手順は同じであります。

**質問 3.3** 骨組構造の部材に対してはどのようにするのですか？

**回答 3.3** ラーメンやアーチのようなはりや柱が結合したものや曲線部材からなるものは、基本的には構造体を直線部材の要素の集合体に置き換え、各要素は局所座標系 $(0-x-y)$ で表した式(3.2)を適用し、それらを構造全体の形状を規定する全体座標系 $(0-X-Y)$ に変換した後に、全要素剛性行列を集合すれば全体の剛性行列が得られ、その後の手順ははりや柱と同じになります。たとえば、図3.2のラーメン構造を例にとって説明します。ここでは、3つの部材がそれぞれ1つの要素として取り扱い、部材1-2は全体座標系での $X$ 軸より反時計方向に角度 $\alpha_1$ だけ傾いており、部材2-3は角度 $\alpha_2 = 0$ 、そして部材3-4は $\alpha_3$ だけ傾いています。いま、部材1-2に着目すれば、図3.3に示すように、局所座標系に沿った節点変位ベクトル $\mathbf{u}' = [u \ v \ \theta]^T$ および節点力ベクトル $\mathbf{P}' = [N \ P \ M]^T$ を全体座標系に沿った節点変位ベクトル： $\bar{\mathbf{u}} = [U \ V \ \theta]^T$ および節点力ベクトル $\bar{\mathbf{P}} = [P_X \ P_Y \ M]^T$ への変換式は以下のようになります。

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}_\alpha \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{P}' = \mathbf{T}_\alpha \bar{\mathbf{P}} \quad (3.3)$$

ここに、 $\mathbf{T}_\alpha$ は座標変換行列で以下のように与えられます。

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

ただし  $M$  と  $\theta$  は  $x-y$  平面に直角な軸まわりの物量であるので座標変換によっても不変であります。また、局所座標系での式(3.2)を全体座標系へ変換すると、

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{T}_\alpha^T \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{T}_\alpha^T \cdot \mathbf{K}' \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{T}_\alpha^T \cdot \mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (3.5)$$

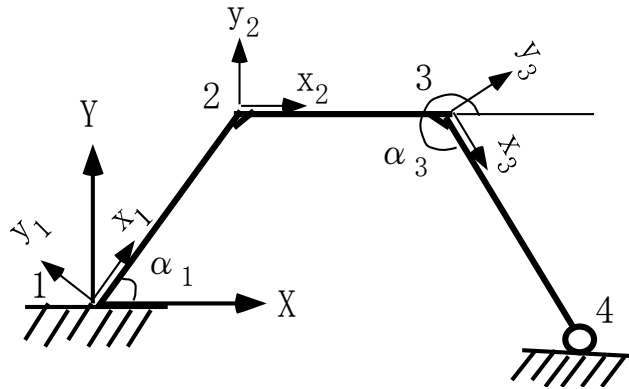


図 3.2 骨組構造

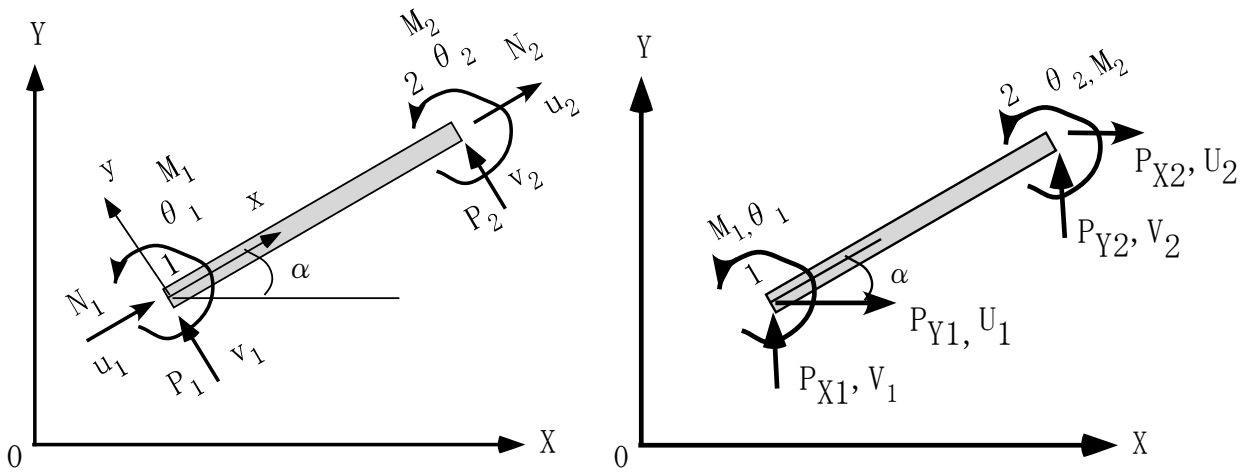


図 3.3 局所座標系(0-x-y)と全体座標系 (0-X-Y) での節点変位と節点力

よって、全体座標系での要素剛性行列は以下ようになります。

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{u}}, \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}_\alpha^T \cdot \mathbf{K}' \cdot \mathbf{T}_\alpha \quad (3.6)$$

以上の結果、骨組構造の各部材の要素について、 $\bar{\mathbf{K}}$  を求めてそれらを全部材について集合すれば、全体剛性行列を得、以下は同じ手順で応力（骨組部材では曲げモーメント、軸力およびせん断力）が求められます。また、図 3.2 のラーメン構造での支点条件（境界条件）は、節点 1 で  $U_1 = V_1 = \theta_1 = 0$ 、節点 4 では  $U_4 = V_4 = 0$  となります。

なお、部材が変断面や荷重分布が複雑な場合は、各部材は複数の要素に分割すれば、要素数が増え、要素剛性行列を集合して得られた全体剛性行列のサイズが増えますが、解析手順は全く同じで



あります。

**質問 3.4** 前述の式(3.2)での要素剛性行列  $\mathbf{K}'$  の具体的な求め方を教えて欲しい。

**回答 3.4** 図 3.1(a)の 2 節点要素について説明します。

図 3.4 に示すように、節点 1 と 2 を結ぶ要素  $q$  が節点力:  $\mathbf{P}' = [N_1 \ N_2 \ N_1 \ N_2 \ M_1 \ M_2]^T$  を受けて、節点変位:  $\mathbf{u}' = [u_1 \ u_2 \ v_1 \ v_2 \ \theta_1 \ \theta_2]^T$  が発生したとします。このときの要素の変形は常微分方程式の解により厳密に算定できますが、有限要素法では、要素長  $l_q$  は部材長より十分小さいと見なし、既知の連続関数:  $v = v(x)$ ,  $u = u(x)$  で近似します。すなわち、節点変位の 6 成分の内、曲げに対する 4 成分がたわみ  $v$  とたわみ角:  $\theta = dv/dx$  に対応し、軸方向変位の 2 成分が軸ひずみ:  $\varepsilon = du/dx$  に対応するので、つぎのような多項式がよく用いられます。

$$u = a_1 + a_2x, \tag{3.7}$$

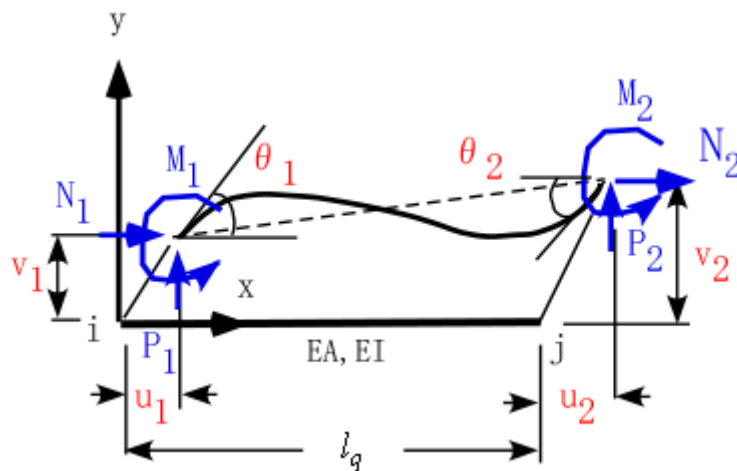


図 3.4 軸力と曲げを受ける棒部材の要素

$$v = b_1 + b_2x + b_3x^2 + b_4x^3 \tag{3.8}$$

ここに、 $a_1, a_2$  および  $b_1, b_2, b_3, b_4$  は未定係数であり、両端の節点変位に適合するように選びます。すなわち、

$$u|_{x=0} = a_1 = u_1, \quad u|_{x=l_q} = a_1 + a_2l_q = u_2 \tag{3.9}$$

$$v|_{x=0} = b_1 = v_1, \quad v|_{x=l_q} = b_1 + b_2l_q + b_3l_q^2 + b_4l_q^3 = v_2 \tag{3.10}$$

$$\theta|_{x=0} = \frac{dv}{dx}\bigg|_{x=0} = b_2 = \theta_1, \quad \theta|_{x=l_q} = \frac{dv}{dx}\bigg|_{x=l_q} = b_2 + 2b_3l_q + 3b_4l_q^2 = \theta_2 \tag{3.11}$$

式(3.9),(3.10)および(3.11)による連立一次方程式を解けば、

$$a_1 = u_1, \quad a_2 = -\frac{u_1 - u_2}{l_q}, \tag{3.12}$$

$$b_1 = v_1, \quad b_2 = \theta_1, \quad b_3 = -\frac{3}{l_q^2}(v_1 - v_2) - \frac{1}{l_q}(2\theta_1 + \theta_2), \quad b_4 = \frac{2}{l_q^3}(v_1 - v_2) + \frac{1}{l_q^2}(\theta_1 + \theta_2) \tag{3.13}$$

式(3.12)および(3.12)をマトリクス形式で表しますと

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/l_q^2 & 3/l_q^2 & -2/l_q & -1/l_q \\ 0 & 0 & 2/l_q^3 & -2/l_q^3 & 1/l_q^2 & 1/l_q^2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{u}' \quad (3.15)$$

また、式(3.7)および(3.8)より

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{H}\mathbf{u}' \quad (3.16)$$

ここに、

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a} \quad (3.17)$$

は一般に補間関数と呼ばれています。

つぎに、図 3.4 のはり部材での軸ひずみ  $\varepsilon_x$  および曲率  $\phi_x$  は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = a_2, \quad \phi_x = -\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = -2b_3 - 6xb_4 \quad (3.18)$$

ただし、曲率は上方 (y の正方向) に凸なるものを正にとっています。

さらに、 $\varepsilon_x$  および  $\phi_x$  と軸力  $N_x$  と曲げモーメント  $M_x$  との関係 (弾性条件) は

$$N_x = EA\varepsilon_x, \quad M_x = EI\phi_x \quad (3.19)$$

ここに、 $E$  は弾性係数、 $A$  は断面積、および  $I$  は断面 2 次モーメントである。変形量ベクトルおよび断面力ベクトルを以下のように表わし、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \phi_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} N_x \\ M_x \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

式(3.17)の弾性条件を以下のように表します。

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.21)$$

ここに、

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

一方、節点変位ベクトルおよび節点力ベクトルを

$$\mathbf{u}' = [u_i \quad u_j \quad v_i \quad v_j \quad \theta_i \quad \theta_j]^T \quad (3.23)$$

$$\mathbf{P}' = [N_1 \quad N_2 \quad P_1 \quad P_2 \quad M_1 \quad M_2]^T \quad (3.24)$$

ここに、右肩の  $T$  は転置を意味しており、以下の行列表示においてもこの記号を用いている。

つぎに、式(3.1)より次式を得る。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (3.25)$$

ここに、

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{l_q}(1-\frac{x}{l_q}) & -\frac{6}{l_q}(1-\frac{x}{l_q}) & 2(2-\frac{3x}{l_q}) & 2(1-\frac{3x}{l_q}) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

一般に、 $\mathbf{B}$  はひずみマトリクスと呼ばれています。

式(3.19)および式(3.25)より

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.27)$$

となり，仮想仕事の原理を適用すれば，

$$\bar{\mathbf{u}}'^T \mathbf{P}' = \int_0^{l_q} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'^T \cdot \mathbf{s} dx = \bar{\mathbf{u}}'^T \int_0^{l_q} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dx = \bar{\mathbf{u}}'^T \int_0^{l_q} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx \cdot \mathbf{u}' \quad (3.28)$$

ここに， $\bar{\mathbf{u}}'$ は仮想変位であり，各要素に対応するものを1.0に取った単位行列を仮想変位に順次適用すると，

$$\mathbf{P}' = \int_0^{l_q} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{K}' \mathbf{u}' \quad (3.29)$$

$$\text{ここに，} \mathbf{K}' = \int_0^{l_q} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx \quad (3.30)$$

が要素剛性行列であり， $\mathbf{B}$ の要素は $x$ の一次関数と定数で与えられるので， $\mathbf{K}'$ の要素は2次以下の多項式で与えられ積分は容易に実行できます。

**質問 3.5** 要素剛性行列から全体剛性行列での演算について教えて欲しい。

**回答 3.5** 図 3.2 の山形ラーメンの場合について説明します。

まず，各部材の複数の要素に分割します。たとえば，柱 1-2 は $k_1$ 分割，はり 2-3 は $k_2$ 分割，柱 3-4 は $k_3$ 分割とし，節点番号は節点 1 から 4 に向けて 0 番から $k_1 + k_2 + k_3$ とします。つぎに，骨組み全体の部材と節点を位置づける全体座標系(O-X-Y)と取り，ついで，各要素については局所座標系(0-x-y)を取り，軸方向に $x$ ，軸直角方向に $y$ を取り，各要素について，式(3.27)の要素剛性行列を作ります。たとえば，要素番号 $q$ の要素の要素剛性行列を $\mathbf{K}'_q$ とすれば，式(3.4)による局所座標系から全体座標系への座標変換 $\mathbf{T}_\alpha$ にて行います。すなわち，

$$\bar{\mathbf{P}}_q = \bar{\mathbf{K}}_q \cdot \bar{\mathbf{U}}_q, \quad \bar{\mathbf{K}}_q = \mathbf{T}_\alpha^T \cdot \mathbf{K}'_q \cdot \mathbf{T}_\alpha \quad (3.31)$$

ここに， $\bar{\mathbf{P}}_q$ ， $\bar{\mathbf{U}}_q$ は全体座標系に沿った $q$ 番目の要素の材端 $i, j$ に対応する節点力ベクトルと節点変位ベクトルであります。

したがって，全体剛性行列 $\bar{\mathbf{K}}$ は各要素行列 $\bar{\mathbf{K}}_q$ を集合することによって求められ，以下のように求めることができます。

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{q=1}^m \bar{\mathbf{K}}_q \quad (3.32)$$

ここに， $m$ は全要素数で，図 3.2 では $m = k_1 + k_2 + k_3$ であり，全体剛性行列 $\bar{\mathbf{K}}$ のサイズは，全節点数を $n$ ，図 3.2 では $n = m + 1$ で， $3n \times 3n$ になります。すなわち，式(3.32)の計算では，サイズ $6 \times 6$ の $\bar{\mathbf{K}}_q$ の各要素の節点 $i = 1, 2, 3, \dots, n$ に対応する要素を順次加算していくことによって容易に求めることができ，この加算は節点 $i$ での釣り合い条件を意味しています。

また，骨組み構造全体の剛性方程式は以下のように表され，

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}} \quad (3.33)$$

ここに，

$$\bar{\mathbf{U}} = [U_1 \quad V_1 \quad \theta_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \theta_2 \quad \dots \quad U_n \quad V_n \quad \theta_n]^T \quad (3.34)$$

は節点 $i = 1, 2, 3, \dots, n$ の全体座標系に沿った変位成分からなるベクトルであり，

$$\bar{\mathbf{R}} = [P_{X1} \quad P_{Y1} \quad M_1 \quad P_{X2} \quad P_{Y2} \quad M_2 \quad \dots \quad P_{Xn} \quad P_{Yn} \quad M_n]^T \quad (3.35)$$

は $\bar{\mathbf{U}}$ に対応する節点荷重ベクトルであります。

**質問 3.6** 節点荷重ベクトル  $\bar{\mathbf{R}}$  の取り扱いについて教えて欲しい。

**回答 3.6** 骨組み部材に作用する荷重は、一般に、節点に作用する集中荷重や集中モーメントの他に要素内に作用する集中荷重、分布荷重やモーメント荷重などがあります。式(3.33)での節点荷重ベクトル  $\bar{\mathbf{R}}$  はそれらをすべて含めて構成されています。すなわち、節点に直接作用する荷重に加えて、要素内に作用する荷重は両端の節点への等価節点荷重として加算されています。以下の等価節点力について説明します。

いま、 $q$  番目の要素に作用する荷重の材端  $i, j$  への寄与は、仮想変位の原理により以下のように表わせます。

$$\tilde{\mathbf{u}}_q'^T \mathbf{P}'_q = \int_0^{l_q} \tilde{v} \cdot p(x) dx + \sum_i \tilde{v}_i P_i + \sum_j \tilde{\theta}_j M_j \quad (3.36)$$

ここに、 $\tilde{\mathbf{u}}_q'$  は仮想節点変位ベクトルで、 $\tilde{v}$ 、 $\tilde{v}_i$ 、 $\tilde{\theta}_j$  は式(3.8)および式(3.14)に基づく仮想たわみおよび仮想たわみ角であり、たとえば、等分布満載荷重  $q_0$  と中央点に集中荷重  $P_0$  を受ける場合は、式(3.34)は以下のようになります。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_q'^T \mathbf{P}'_q &= p_0 \int_0^{l_q} \tilde{v} dx + P_k \tilde{v}|_{x=x_k} = p_0 \int_0^{l_q} (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 x + \tilde{b}_3 x^2 + \tilde{b}_4 x^3) dx \\ &+ P_k (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 \frac{l_q}{2} + \tilde{b}_3 \frac{l_q^2}{4} + \tilde{b}_4 \frac{l_q^3}{8}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$= (P_0 + p_0 l_q) \tilde{b}_1 + \frac{l_q}{2} (P_0 + p_0 l_q) \tilde{b}_2 + \frac{l_q^2}{12} (3P_0 + 4p_0 l_q) + \frac{l_q^3}{8} (P_0 + 2p_0 l_q)$$

$$\text{ここに、式(3.15)より、} [\tilde{a}_1 \quad \tilde{a}_2 \quad \tilde{b}_1 \quad \tilde{b}_2 \quad \tilde{b}_3 \quad \tilde{b}_4]^T = \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_q' \quad (3.38)$$

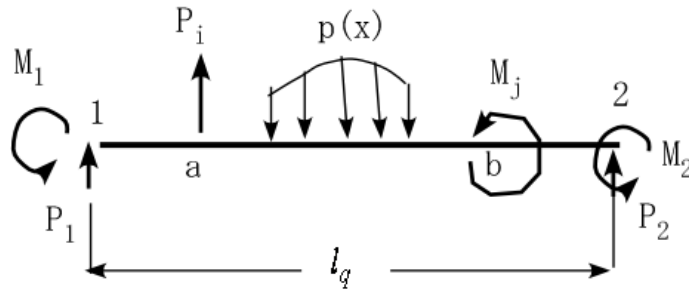


図 3.5 荷重分布と節点力

よって、

$$\tilde{\mathbf{u}}_q'^T \mathbf{P}'_q = \tilde{\mathbf{u}}_q'^T \left[ 0 \quad 0 \quad \frac{P_0 + p_0 l_q}{2} \quad \frac{P_0 + p_0 l_q}{2} \quad \frac{P_0 l_q}{8} + \frac{p_0 l_q^2}{12} \quad -\frac{P_0 l_q}{8} - \frac{p_0 l_q^2}{12} \right]^T \quad (3.39)$$

となり、仮想変位の任意性により要素  $q$  での節点荷重ベクトルは以下のように与えられます。

$$\mathbf{P}'_q = \left[ 0 \quad 0 \quad \frac{P_0 + p_0 l_q}{2} \quad \frac{P_0 + p_0 l_q}{2} \quad \frac{P_0 l_q}{8} + \frac{p_0 l_q^2}{12} \quad -\frac{P_0 l_q}{8} - \frac{p_0 l_q^2}{12} \right]^T \quad (3.40)$$

すなわち、等分布満載荷重  $q_0$  の場合は、等分布満載荷重  $q_0 l_q$  は節点力： $P_1 = P_2 = q_0 / l_q$ 、 $M_1 = q_0 l_q^2 / 12$ 、 $M_2 = -q_0 l_q^2 / 12$  に、中央集中荷重  $P_0$  は  $P_1 = P_2 = P_0 / 2$ 、 $M_1 = P_0 l_q / 8$ 、 $M_2 = -P_0 l_q / 8$  に置き換えられていることが分かります。

つぎに、局所座標系 (0-x-y) で表された  $\bar{\mathbf{P}}_q$  を全体座標系 (0-X-Y) 沿った量に変換し、すなわち

$$\bar{\mathbf{P}}_q = \mathbf{T}_\alpha^T \mathbf{P}'_q \quad (3.41)$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \sum_{q=1}^m \bar{\mathbf{P}}_q \quad (3.42)$$

ここに、記号  $\sum_{q=1}^m$  は  $\bar{\mathbf{P}}_q, q=1,2,3,\dots,m$  の要素について、それぞれ節点  $i=1,2,3,\dots,n$  に属するもの

の和を意味しています。最後に、 $\bar{\mathbf{P}}$  に節点に直接作用する集中荷重および集中モーメントからなる荷重ベクトル  $\bar{\mathbf{P}}'$  を加えたものが全節点荷重ベクトルになります。すなわち、

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}' \quad (3.43)$$

**質問 3.7** 一般的な骨組構造の FEM 解析の定式化の手順を教えてください。

**回答 3.7** 図 3.6 に示す任意形のラーメン構造について説明します。

最初に全体座標系：0-X-Y を設定し、節点 1,2,3,4,5 の座標値を決めます。つぎに、部材名 ① - ⑤ とそれらの剛性 ( $E_1, A_1, I_1, \dots, E_5, A_5, I_5$ ) を定めます。さらに、各部材の局所座標系：(0-x<sub>i</sub>-y<sub>i</sub>),  $i=1,2,\dots,5$  と各部材の傾き、すなわち X 軸に対する x<sub>i</sub> 軸の角度、 $\theta_i, i=1,2,\dots,5$  を定めます。

ついで、各部材を微小長さ  $l_q$  の要素に分割して、節点 i を含む全節点数を  $n$ 、全要素数を  $m$  とし、式(3.26)および(3.30)よりひずみマトリクス  $\mathbf{B}_q$  と要素剛性行列  $\mathbf{K}_q'$  を作成し、式(2.4)の座標変換行列を用いて、局所座標系での  $\mathbf{K}_q'$ 、節点変位ベクトル  $\mathbf{u}_q'$  および節点力ベクトル  $\mathbf{P}'_q$  を全体座標系での諸量： $\bar{\mathbf{K}}_q, \bar{\mathbf{U}}_q, \bar{\mathbf{P}}_q$  に変換します。すなわち、

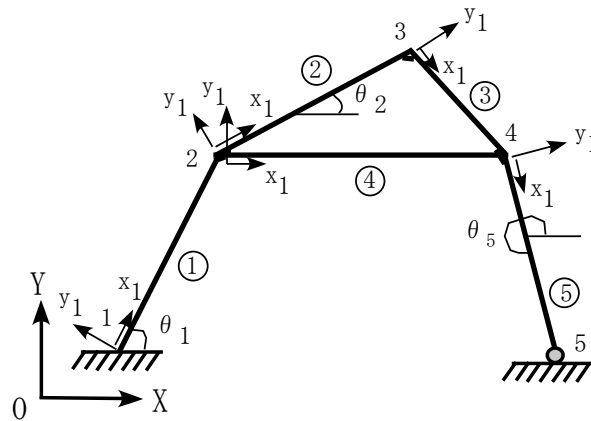


図 3.6 任意形ラーメン

$$\mathbf{T}_{\theta_i} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{u}'_q = \mathbf{T}_{\theta_i} \bar{\mathbf{U}}_q, \quad \mathbf{P}'_q = \mathbf{T}_{\theta_i} \bar{\mathbf{P}}_q, \quad \mathbf{P}'_q = \mathbf{K}_q \mathbf{u}'_q \quad (3.45)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_q = \mathbf{T}_{\theta_i}^T \cdot \mathbf{P}'_q = \mathbf{T}_{\theta_i}^T \cdot \mathbf{K}_q \mathbf{u}'_q = \mathbf{T}_{\theta_i}^T \cdot \mathbf{K}_q \mathbf{T}_{\theta_i} \cdot \bar{\mathbf{U}}_q \quad (3.46)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_q = \bar{\mathbf{K}}_q \cdot \bar{\mathbf{U}}_q, \quad \bar{\mathbf{K}}_q = \mathbf{T}_{\theta_i}^T \cdot \mathbf{K}_q \cdot \mathbf{T}_{\theta_i} \quad (3.47)$$

全節点変位ベクトルを

$$\bar{\mathbf{U}} = [\bar{U}_1 \quad \bar{V}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{U}_2 \quad \bar{V}_2 \quad \bar{\theta}_2 \quad \dots \quad \bar{U}_n \quad \bar{V}_n \quad \bar{\theta}_n]^T \quad (3.48)$$

ここに、 $\bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{\theta}_i, i=1,2,3,\dots,n$ は $\bar{\mathbf{U}}_q, q=1,2,3,\dots,m$ の要素の中の節点*i*に対応する要素であり、全節点荷重ベクトル（回答 3.7 を参照）を

$$\bar{\mathbf{R}} = [P_{X1} \quad P_{Y1} \quad \theta_1 \quad P_{X2} \quad P_{Y2} \quad M_2 \quad \dots \quad P_{Xn} \quad P_{Yn} \quad M_n]^T \quad (3.49)$$

と表せば、全体剛性行列 $\bar{\mathbf{K}}$ および全剛性方程式は仮想変位の原理に基づき以下のように表せます。

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{q=1}^m \bar{\mathbf{K}}_q \quad (3.50)$$

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}} \quad (3.51)$$

ここに、記号 $\sum_{q=1}^m$ は $\bar{\mathbf{K}}_q$ の要素の中での節点*i*、 $i=1,2,3,\dots,n$ に対応する要素の総和を意味しており、各節点についての釣り合い条件に対応しています。

境界条件は固定端 1 では、 $\bar{U}_1 = \bar{V}_1 = \bar{\theta}_1 = 0$ 、ヒンジ端 5 では、 $\bar{U}_5 = \bar{V}_5 = 0$ であり、それらに対応する行および列を式(3.44)から除去した以下の式

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{R}} \quad (3.52)$$

は $(3n-5)$ 元連立一次方程式となり、その解を求め、 $\bar{\mathbf{U}}$ を決定し、各要素(*q*)についての $\bar{\mathbf{U}}_q$ を用いて、式(3.28)より、 $\mathbf{u}'_q = \mathbf{T}_{\theta_i} \cdot \bar{\mathbf{U}}_q$ を決定し、節点力ベクトル： $\mathbf{P}'_q = \mathbf{K}_q \mathbf{u}'_q$ とそれに釣り合う断面力： $N_x, S_x, M_x$ を求めるという手順を辿ります。

#### 4. 平面構造に対する FEM 要素について

質問 4.1：骨組み構造と異なる一般的な構造の FEM 解析手順について教えて欲しい。

回答 4.1：図 1.2 で示した FEM 解析の基本的な流れは平面構造も骨組み構造と同じです。

構造物は厳密にはすべて 3 次元構造であるが、構造形状と荷重分布に応じて 2 次元問題や 1 次元問題として取り扱うことができます。たとえば、図 4.1(a)に示すような左端が剛な壁に支えられた

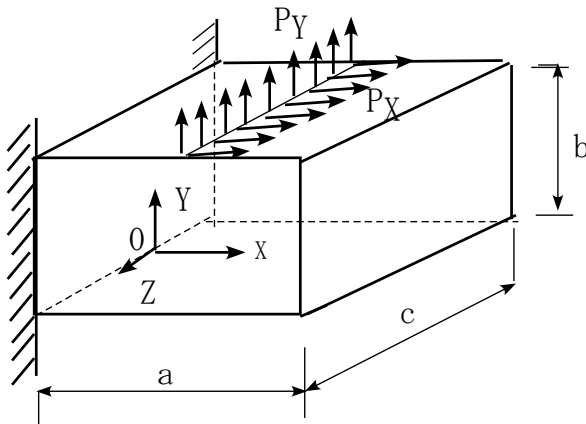


図 4.1(a) 3次元構造の例

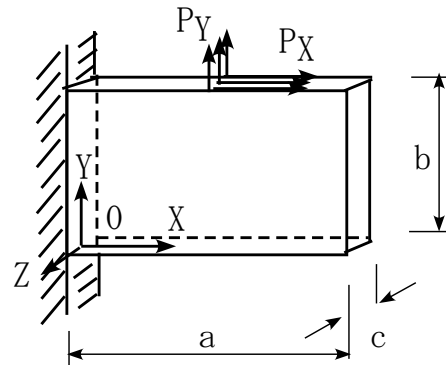


図 4.1(b) 平面構造の例

立方体状の構造物があります。この構造は3次元体でありますが、もし、上面の荷重がZ方向に一様に分布している場合で、図4.1(b)のように、Z方向の辺長 $c$ がX,Y方向の辺長 $a,b$ に比べて非常に短ければ、構造内部に発生する応力成分はX-Y平面内のみであり、Z方向の応力成分が発生しません。また、Z方向の辺長 $c$ がX,Y方向の辺長 $a,b$ に比べて非常に大きい場合には、Z方向の端面の極く近傍を除いた領域ではZ方向のひずみが発生しません。前者は平面応力問題とよばれ、後者は平面ひずみ問題と呼ばれ、いずれも2次元問題として取り扱うことができます。さらに、辺長 $b,c$ が辺長 $a$ に比べて十分に小さい場合は、はりの問題と呼ばれ、前節で述べたような軸方向であるX方向のみの1次元問題として取り扱うことができます。

以下、2次元問題でのFEM解析手順について説明します。

平面応力およびひずみ問題では、FEM分割要素内の応力とひずみを規定する局所座標系(0-x-y)は全体座標系(0-X-Y)と同じ方向に取るのが一般的であり、応力ベクトル $\sigma$ およびひずみベクトル $\varepsilon$ は以下のように表します。

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T, \quad \varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (4.1)$$

すなわち、平面応力問題も平面ひずみ問題も要素内のひずみエネルギーに寄与するのは、x-y面内の応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ のみであり、弾性条件のみを以下のように表します。

$$\sigma = C\varepsilon \quad (4.2)$$

ここに、

$$\text{平面応力問題では, } C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\text{平面ひずみ問題では, } C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ここに、 $E$ は弾性係数(ヤング率)、 $\nu$ はポアソン比であります。

なお、以下のFEMの定式化においては、平面応力問題も平面ひずみ問題も全く同じであるので、両者を区別しないで説明します。

図4.2にはX-Y平面内の要素分割の一例を示しています。2次元要素は構造体の幅の中心線を通る形状とし、図では長方形要素を用いていますが、長方形要素の他に三角形要素、任意四辺形要素などがあり、対象構造の境界辺を含む任意の形状の要素が適用できます。なお、Z方向の厚みは単位長さ、すなわち $c=1.0$ として取り扱います。

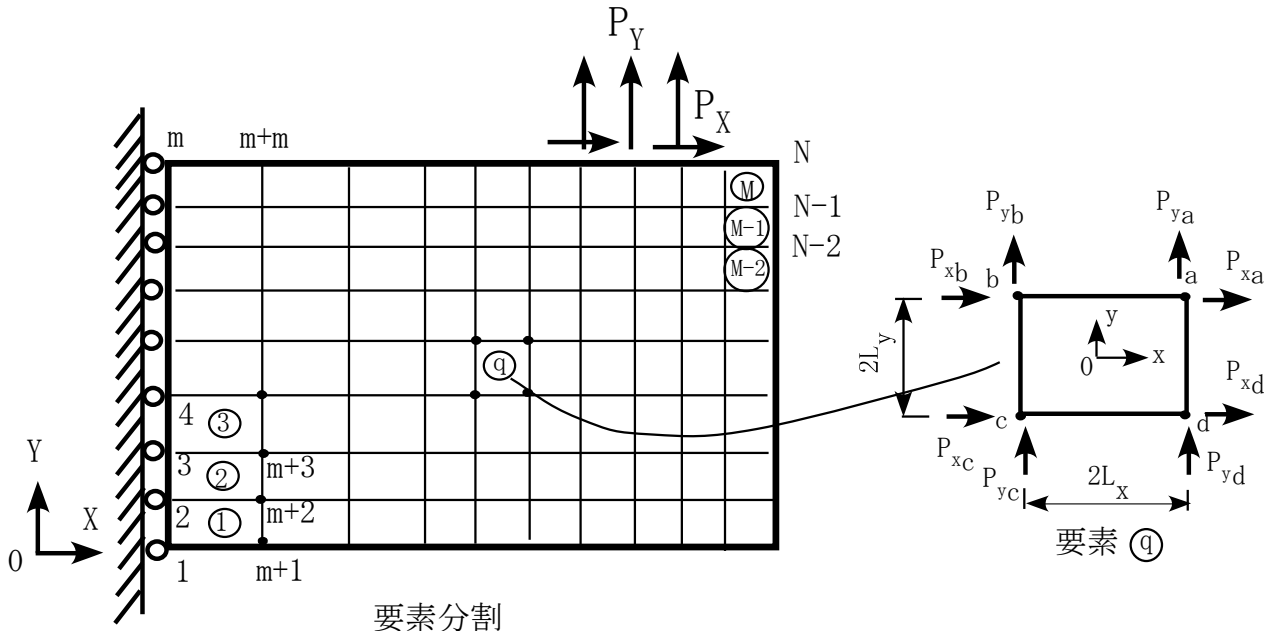


図 4.2 平面構造の要素分割の例

FEM 解析での定式化の手順は前述の骨組み構造の場合と同じです。まず、最初に、節点番号  $1, 2, 3, \dots, N$  を付けます。図 4.2 の例では、要素分割は  $Y$  方向に  $m-1$  分割、 $X$  方向に  $n-1$  分割で  $N = m \times n$  となります。つぎに、要素番号は  $(1), (2), (3), \dots, (M)$  とし、 $M = (m-1) \times (n-1)$  となります。

図 4.2 の例では、局所座標軸  $(x, y)$  は全体座標軸  $(X, Y)$  に平行して採られているので、座標変換の操作は不要になり、節点変位ベクトル  $\bar{\mathbf{U}}_i$  を以下のように定義します。

$$\bar{\mathbf{U}}_i = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_N \quad v_N]^T \quad (4.5)$$

ここに、 $u_i, v_i, i = 1, 2, 3, \dots, N$  は  $x$  軸および  $y$  軸方向の節点変位成分です。

つぎに、要素剛性行列  $\mathbf{K}'_q$  は、図に示すような節点  $a, b, c, d$  で囲まれた任意の要素  $(q)$  に対して求めます。まず、要素内の変位成分を以下のように仮定します。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy, \\ v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここに、 $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$  は未定係数であります。

長方形要素  $q$  の  $x$  軸および  $y$  方向の辺長を  $2L_x$  および  $2L_y$  とし、 $x-y$  座標の原点  $0$  を長方形の中心にとり、要素  $q$  を囲む節点（材端）変位ベクトルを

$$\mathbf{u}_q = [\mathbf{u}_{q1} \quad \mathbf{u}_{q2}]^T, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{u}_{q1} = [u_a \quad u_b \quad u_c \quad u_d]^T, \quad \mathbf{u}_{q2} = [v_a \quad v_b \quad v_c \quad v_d]^T$$

と表せば、

$$\mathbf{u}_{q1} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{q2} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

ここに、



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & L_x & L_y & L_x L_y \\ 1 & -L_x & L_y & -L_x L_y \\ 1 & -L_x & -L_y & L_x L_y \\ 1 & L_x & -L_y & -L_x L_y \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

となり,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_{q1}, \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_{q2} \quad (4.10)$$

一方, 要素内のひずみ成分は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_2 + a_4 y, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b_3 + b_4 x, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_3 + b_2 + a_4 x + b_4 y \quad (4.11)$$

と表され, ひずみ成分は

$$\varepsilon_x = [0 \ 1 \ 0 \ y] \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_{q1}, \quad \varepsilon_y = [0 \ 0 \ 1 \ x] \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_{q2} \\ \gamma_{xy} = [0 \ 0 \ 1 \ x] \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_{q1} + [0 \ 1 \ 0 \ y] \cdot \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_{q2} \quad (4.12)$$

と表せ,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{q1} \\ \mathbf{u}_{q2} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

したがって,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_q \quad (4.15)$$

とおけば, ひずみマトリクス  $\mathbf{B}$  は以下のように与えられる.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

さらに, 要素剛性行列  $\mathbf{K}'_q$  は次式により求めることができます.

$$\mathbf{K}'_q = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d x d y \quad (4.16)$$

ここに, 積分は要素の面積分を意味し, 被積分関数は  $x, y$  の 2 次以下の多項式となり容易に積分が実行できます.

以下, 要素剛性行列  $\mathbf{K}'_q$  を集合して全体剛性行列  $\bar{\mathbf{K}}$  を得る手順は骨組み構造の場合と同じであり, 局所座標軸  $(x, y)$  と全体座標軸  $(X, Y)$  は平行しており, 座標変換の操作が不要であるので

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_{q=1}^M \mathbf{K}'_q, \quad (4.17)$$

ここに,  $\bar{\mathbf{K}}$  のサイズは  $2N \times 2N$  であり, 記号  $\sum_{q=1}^M$  は,  $\mathbf{K}'_q$  の行を列を  $\bar{\mathbf{U}}$  の配列に合せた後に, それらの総和を取ることを意味しています.

一方, 節点荷重ベクトル  $\bar{\mathbf{R}}$  については, 境界辺の沿った節点  $k$  に作用する等価集中荷重:  $P_{xk}, P_{yk}$  を仮想仕事の原理により求め, それらを  $\bar{\mathbf{U}}$  の配列に合せた後に和を取り, 全体の剛性方程式を以

下のように決定します。

$$\overline{\mathbf{K}}\overline{\mathbf{U}} = \overline{\mathbf{R}} \quad (4.18)$$

ここに、 $\overline{\mathbf{U}}$  および  $\overline{\mathbf{R}}$  のサイズはおれぞれ  $2N \times 2N$  となり、図 4.2 の固定辺に属する節点の  $x, y$  方向の変位成分はゼロになるので、式(4.18)での固定辺に対応する行および列を消去して、以下の連立一次方程式を得ます。

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{R}} \quad (4.19)$$

すなわち、固定辺の節点数を  $m$  とすれば、式(4.19)は  $2(N-m)$  元の連立一次方程式になっています。

最後に、式 (4.19) を解き、全節点変位ベクトル： $\overline{\mathbf{U}}$  を決定し、さらに各要素の節点変位ベクトル： $\mathbf{u}_q = [\mathbf{u}_{q1} \quad \mathbf{u}_{q2}]^T$  を求め、式(4.2)および式(4.15)より、要素内の応力が決定できます。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{B}_q \mathbf{d} \quad (4.20)$$

**質問 4.2** 平板の FEM 解析法について教えて欲しい。

**回答 4.2** 平板の要素は 2 方向の曲げモーメント ( $M_x, M_y$ ) およびねじりモーメント ( $M_{xy}$ ) を受け、対応する曲率 ( $\phi_x, \phi_y$ ) およびねじり率 ( $\phi_{xy}$ ) を受け、弾性方程式は以下のように表せます。

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\phi} \quad (4.21)$$

ここに、

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_{xy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

ここに、 $E$  は弾性係数 (ヤング率)、 $\nu$  はポアソン比であります。

図 4.3 に示すような長方形要素の要素剛性行列を以下に求めてみます。

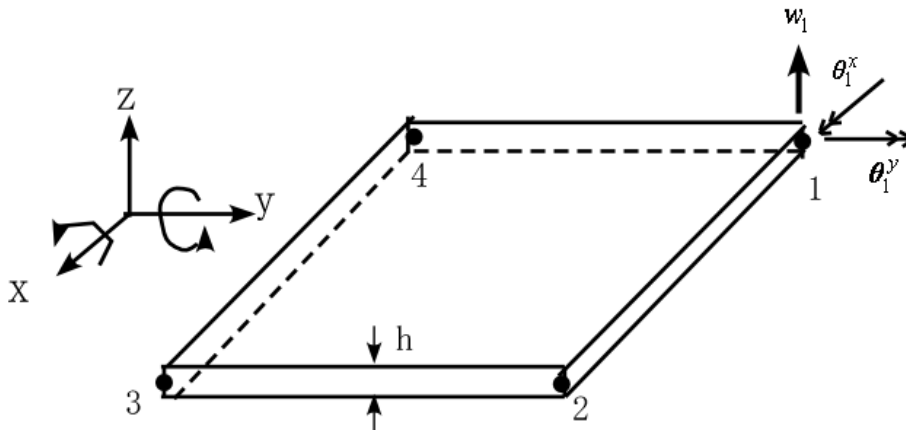


図 4.3 長方形平板要素

四辺形要素は 4 節点で、一つの節点で  $w_i, \theta_i^x, \theta_i^y$  の変位成分を有するので、12 自由度の問題として取り扱い、要素内のたわみ  $w$  をつぎのように与えます。

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (4.23)$$

ここに、 $\alpha_i, i = 1, 2, 3, \dots, 12$  は未定係数であり、式(4.23)を以下のように表します。

$$w = \Phi^T \alpha \quad (4.24)$$

ここに,

$$\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_{12}]^T \quad (4.25)$$

$$\Phi = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3]^T \quad (4.26)$$

たわみ角は

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4x + \alpha_5y + 3\alpha_7x^2 + 2\alpha_8xy + \alpha_9y^2 + 3\alpha_{11}x^2y + \alpha_{12}y^3 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5x + 2\alpha_6y + \alpha_8x^2 + 2\alpha_9xy + 3\alpha_{10}y^2 + \alpha_{11}x^3 + 3\alpha_{12}xy^2 \quad (4.28)$$

要素の節点*i*の座標を  $(x_i, y_i)$  とし, 節点でのたわみ  $w_i$ , 回転角  $\theta_i^x$ ,  $\theta_i^y$  を座標軸に沿った量として表すと,

$$w_i = (w)_{x_i, y_i}; \quad \theta_i^x = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i, y_i}; \quad \theta_i^y = - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i, y_i} \quad (4.29)$$

また, 節点変位ベクトルを

$$\mathbf{u} = [w_1 \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_1^x \quad \dots \quad \theta_4^x \quad \theta_1^y \quad \dots \quad \theta_4^y]^T \quad (4.30)$$

と表すと,

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\alpha \quad (4.31)$$

ここに,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 & x_1^3 & x_1y_1^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_4 & y_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_4^3y_4 & x_4y_4^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -3x_4^2y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix}$$

となり, 未定係数は以下のように与えられる.

$$\alpha = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \quad (4.32)$$

平板要素の曲率およびねじり率は

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_4 - 6\alpha_7x - 2\alpha_8y - 6\alpha_{11}xy \\ -2\alpha_6 - 2\alpha_9x - 6\alpha_{10}y - 6\alpha_{12}xy \\ -2\alpha_5 - 4\alpha_8x - 4\alpha_9y - 6\alpha_{11}x^2 - 6\alpha_{12}y^2 \end{bmatrix} = \mathbf{E}\alpha \quad (4.33)$$

ここに,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 & -6y^2 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

と表され、式(4.33)を考慮すると、

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.35)$$

ここに、 $\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{A}^{-1}$ がひずみマトリクスとなります。

以下の取り扱いが平面構造の場合と同じであり、要素剛性行列は

$$\mathbf{K}'_q = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d x d y \quad (4.36)$$

となり、局所座標軸  $(x, y)$  は全体座標軸  $(X, Y)$  に平行である場合は、全体剛性行列は

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_q \mathbf{K}'_q \quad (4.37)$$

と表され、節点荷重ベクトル

$$\bar{\mathbf{R}} = [P_{X1} \ P_{Y1} \ M_1 \ P_{X2} \ P_{Y2} \ M_2 \ \dots \ P_{Xn} \ P_{Yn} \ M_n]^T \quad (4.38)$$

が与えられておれば、全体剛性方程式は以下のように表されます。

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{R}} \quad (4.39)$$

境界条件は、境界边上の節点変位成分を規定することによって与えられ、たとえば、節点  $k$  が固定端であれば、 $u_k = v_k = \theta_k = 0$  となり、前述の式(4.19)と同等の連立一次方程式を得ることができ、その解より、着目要素の節点変位  $\mathbf{u}_q$  が決定でき、要素内の断面力は式(4.21)および(4.35)により、

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{D} \mathbf{B}_q \mathbf{u} \quad (4.40)$$

求められます。

**質問 4.3** シェルの FEM 解析法について教えて欲しい。

**回答 4.3** 図 4.4 に示すように、シェルとは曲面からなる構造であります。平板構造と同様、曲面の中央面を要素分割しますが、要素は十分小さいものとし、曲面要素でなく平面要素を用いるのが一般的であります。

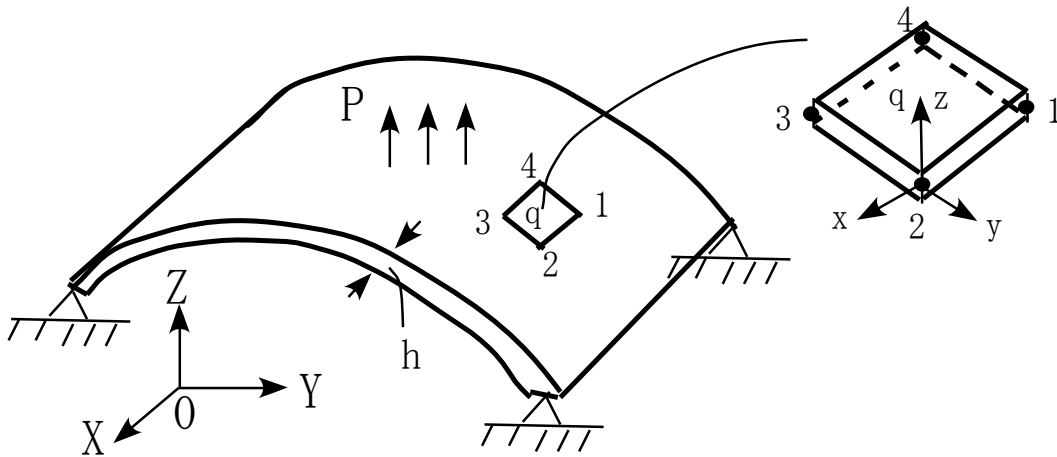


図 4.4 シェル構造の例

図 4.5 に示すように、平面シェル要素に作用する断面力には、平板要素の曲げおよびねじりモーメントに加えて平面要素の面内力が加わります。したがって、断面力ベクトルおよびひずみベクトルは

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_{xy} \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

となり，弾性則は以下のように表せます．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{sh} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

ここに， $\mathbf{D}_{sh}$  はシェル要素の弾性係数行列で式(4.22)の曲げ要素と式(4.3)の平面応力要素から以下のように構成されます．

$$\mathbf{D}_{sh} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

ここに， $h$  は板厚であります．

以下，要素剛性行列も平板要素の剛性行列  $\mathbf{K}'_p$  と平面応力要素の剛性行列  $\mathbf{K}'_m$  によって構成され，4 節点の長方形要素を考えると，要素変位ベクトル  $\mathbf{u}_q = [\mathbf{u}_p \quad \mathbf{u}_m]^T$  で，平板要素で 12 自由度，平面応力要素で 8 自由度の合計 20 自由度になり，以下のように構成されます．

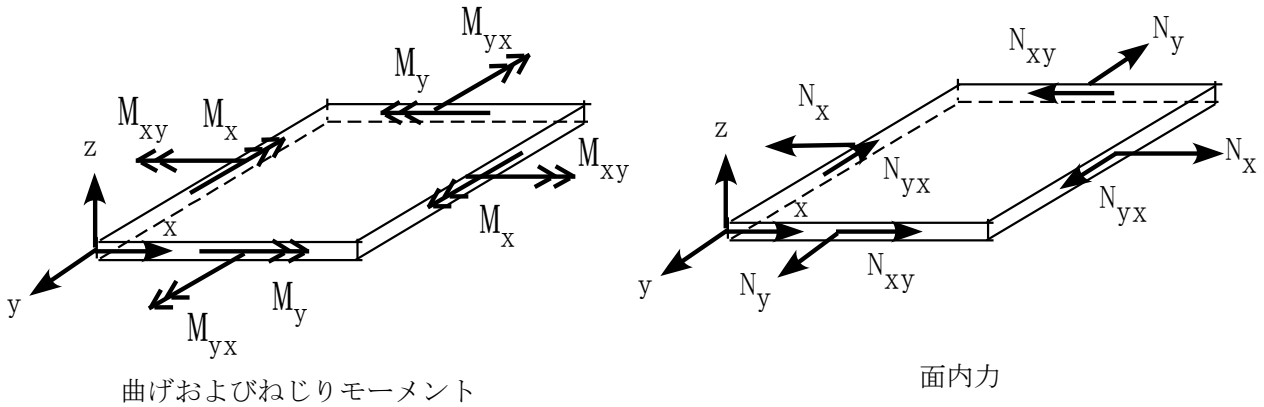


図 4.5 シェル要素の作用する断面力

$$\mathbf{K}'_{sh} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}'_m \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

シェル要素の面が傾いているので，局所座標系 ( $0-x-y$ ) から全体座標系 ( $0-X-Y$ ) が必要になります．すなわち，

$$\bar{\mathbf{K}}_{sh} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}'_{sh} \mathbf{T} \quad (4.45)$$

ここに， $\mathbf{T}$  は 3 次元座標の変換行列であり，座標変換後は以下のように表せます．

$$\mathbf{K}''_{sh} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{sh} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

ここに、 $\mathbf{K}_{sh}''$ は24行、24列の行列で、20行、20列の $\mathbf{K}_{sh}'$ に4行4列のゼロ行列を加えたものです。なお、 $\mathbf{K}_{sh}''$ はこのままでは特異になりますので、実際の演算では、ゼロ行列は極く微小な正の係数 $k$ を単位行列 $\mathbf{I}$ に掛けたものに置き換えて実行されます。すなわち、

$$\mathbf{K}_{sh}'' = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{sh}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

以下の手順は、平板構造の場合と同じになりますので省略します。

## 5. アイソパラメトリック FEM について

**質問 5.1** アイソパラメトリック FEM 要素という言葉をよく耳にしますが、どのようなものですか？ また、メリットは何ですか？

**回答 5.1** アイソパラメトリック要素とは、要素内の座標と変位を表すために、節点での座標と変位を用いて要素内に内挿補間する際に、座標と変位を同一のパラメータで補間することを意味しています。

要素剛性行列を求める際の最も重要な点は要素内の変位関数の選び方であり、前述の例題では、変位関数を要素ごとに設定された直交座標  $(x, y, z)$  に関する多項式で与えており、たとえば平面構造の場合では以下のようになっています。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \dots, \\ v(x, y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + \dots \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここに、 $a_i, b_i$ は未定係数と呼ばれるパラメータであり、変位関数は要素内の剛体変位、回転変位、曲率に対応する低次の項を含み、節点変位の自由度に対応するように選ばれており、このような手法は一般化座標法と呼ばれています。

一方、アイソパラメトリック法は、平面構造の場合は次式のように与えます。

$$x = \sum_{i=1}^q h_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^q h_i y_i, \quad (5.2)$$

$$u = \sum_{i=1}^q h_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^q h_i v_i \quad (5.3)$$

ここに、 $q$ は節点数、 $x_i, y_i$ および $u_i, v_i$ は要素に規定する節点の座標値および変位量であり、 $h_i$ が補間関数です。すなわち、座標も変位も同じ補間関数 $h_i$ を用いており、前述の一般化座標法のように直交座標系でなくても同じ補間関数 $h_i$ を用いることが最大の特長であります。

たとえば、図 5.1 に示すような任意四辺形要素を考え、節点 1,2,3,4 の座標を $x_i, y_i, i=1,2,3,4$ とし、以下のように表します。

$$\begin{aligned} x &= h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + h_4x_4, \\ y &= h_1y_1 + h_2y_2 + h_3y_3 + h_4y_4 \end{aligned} \quad (5.4)$$

つぎに、図 5.2 に示すように、自然座標系  $(0-r-s)$  を考え、節点 1,2,3,4 の座標を  $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$  とすれば、補間関数 $h_i$ を以下のように与えることができます。

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s), & h_2 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s), \\ h_3 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s), & h_4 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \end{aligned} \quad (5.5)$$

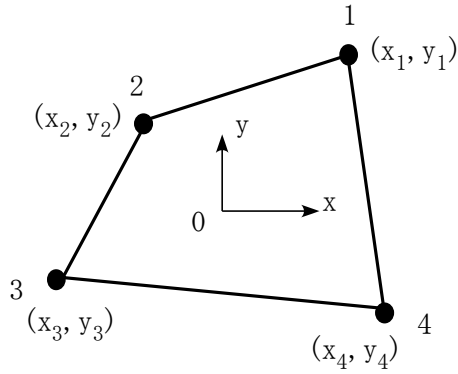


図 5.1 原座標系

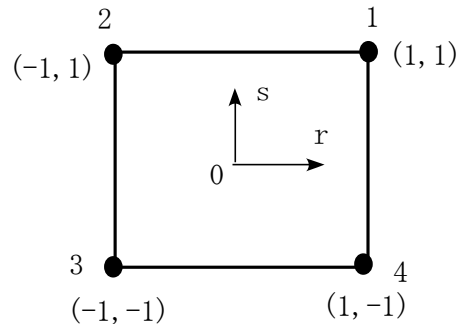


図 5.2 自然座標系

したがって、要素内の変位  $(u, v)$  は同じ補間関数を用いて、

$$\begin{aligned} u &= h_1 u_1 + h_2 u_2 + h_3 u_3 + h_4 u_4, \\ v &= h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3 + h_4 v_4 \end{aligned} \quad (5.6)$$

ここに、 $u_i, v_i, i=1,2,3,4$  は節点変位、と表します。すなわち、 $h_i$  は着目節点  $i$  のみが 1 で他の節点では 0 となるような連続関数を意味しています。

ところで、要素内のひずみは変位成分  $(x, y)$  の座標  $(x, y)$  の微分形で与えられるので

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \quad (5.7)$$

の演算を必要とするが、 $h_i = \text{funct}(r, s)$  で与えているので、以下のような手順を必要とします。

まず、

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial r} x_i, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial s} x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial r} y_i, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial s} y_i \quad (5.8)$$

より、ヤコビアン行列

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

を求め、その逆行列

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.10)$$

より、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

の関係より、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.12)$$

を求めなければなりません。また、 $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ 、ここに  $\mathbf{u}$  は節点変位ベクトル、 $\mathbf{B}$  はひずみマトリクス

で、要素剛性行列： $\mathbf{K} = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx dy$  の計算を行わねばなりません。式(5.2)および(5.3)で示したように、座標や変位成分が自然座標系  $(r, s)$  で与えられているために、積分のための座標変換が必要になります。すなわち、

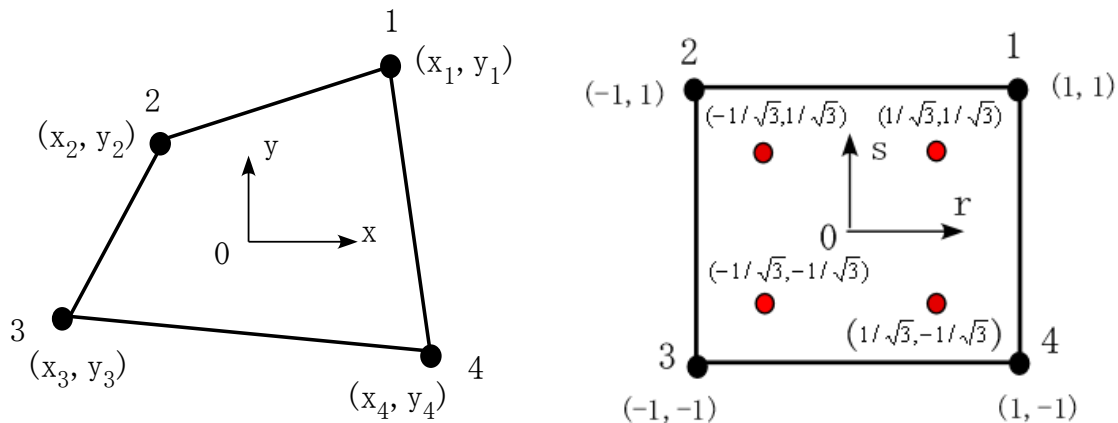
$$\mathbf{K} = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx dy = \iint \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} dr ds \quad (5.13)$$

ここに、 $\det \mathbf{J} = |\mathbf{J}|$  であります。

長方形要素以外の任意四辺形要素では、 $\mathbf{J}$  が  $r, s$  の関数になり  $\mathbf{J}^{-1}$  や  $\det \mathbf{J}$  が複雑な関数になるので、式(5.13)の積分は数値積分法に頼らねばなりません。すなわち、着目する要素内の積分点  $(r_i, s_j)$  での  $\mathbf{B}_{ij}$  および  $\det \mathbf{J}_{ij}$  を数値的に求め、以下のように実行します。

$$\mathbf{K} = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \mathbf{B}_{ij}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{ij} \det \mathbf{J}_{ij} \quad (5.14)$$

ここに、 $\alpha_{ij}$  は重み係数であります。数値積分法はいろいろありますが、できるだけ少ない積分点 (サンプルポイント) で良い精度を得るために、Gauss 積分式がよく用いられます。たとえば、任意四辺形要素に対して、 $2 \times 2$  の Gauss 積分法を示しますと、図 5.3 のように、積分点  $(r_i, s_j)$  は  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ,  $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ,  $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ ,  $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$  となり、 $\alpha_{ij} = 1.0$  となります。なお、1次元、2次元および3次元 Gauss 積分における積分点の取り方と重み係数の取り方の詳細については専門書を参考にしてください。



(a) 任意四辺形要素と原座標

(b) 自然座標系での積分点

図 5.3  $2 \times 2$  Gauss 積分

アイソパラメトリック要素の最大のメリットは、任意形状の要素に対しても同一の手法で要素剛性行列を求められる点であり、コンピュータ解析に向いていると言えます。

## 6. 各種の構造問題に対する FEM 解析について

質問 6.1 FEM による温度応力解析法について教えて欲しい。

回答 6.2 いかなる拘束のない 3次元弾性体が温度上昇  $t$  を受けた時の自由膨張に伴う温度ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}_{th}$  は以下のように表されます。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{th} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \\ &= \alpha t [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (6.1)$$

ここに、 $\alpha$  は線膨張係数であります。もし、弾性体が何らかの拘束を受けていると  $\boldsymbol{\varepsilon}_{th}$  の一部が



拘束され、弾性ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  が発生し、全ひずみ  $\boldsymbol{\varepsilon}$  は以下のように表せます。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{th} + \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (6.2)$$

線形弾性体の応力-ひずみ関係は

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{th}) \quad (6.3)$$

3次元線形弾性体では、

$$\mathbf{C} = \tilde{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & \nu/(1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu/(1-\nu) & \nu/(1-\nu) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G/\tilde{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G/\tilde{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G/\tilde{E} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

ここに、

$$\tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad E : \text{ヤング率}, \quad \nu : \text{ポアソン比である.}$$

したがって、初期応力  $\boldsymbol{\sigma}_{int}$  は以下のように定義すれば、

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_{int}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{int} = -\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_{th} \quad (6.5)$$

一方、要素  $m$  でのひずみマトリクスを  $\mathbf{B}_{(m)}$ 、節点変位を  $\mathbf{U}$  とすれば、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_{(m)}\mathbf{U} \quad (6.6)$$

仮想仕事の原理を適用すれば、

$$\sum_m \iiint \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\sigma}_{int}) dx dy dz = \delta \mathbf{U}^T \sum_m \iiint \left\{ \mathbf{B}_{(m)}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{(m)} \mathbf{U} + \mathbf{B}_{(m)}^T \boldsymbol{\sigma}_{int} \right\} dx dy dz = 0 \quad (6.7)$$

ここに、 $\delta \mathbf{U}$  と  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  は仮想ひずみと仮想節点変位であります。式(6.7)より、

$$\sum_m \iiint \mathbf{B}_{(m)}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{(m)} d x d y d z \mathbf{U} = - \sum_m \iiint \mathbf{B}_{(m)}^T \boldsymbol{\sigma}_{int} d x d y d z \quad (6.8)$$

したがって、全体剛性行列  $\bar{\mathbf{K}}$  と初期荷重ベクトル  $\bar{\mathbf{R}}_{int}$  を導入すれば、

$$\bar{\mathbf{K}} = \sum_m \iiint \mathbf{B}_{(m)}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{(m)} dx dy dz, \quad (6.9)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{int} = - \sum_m \iiint \mathbf{B}_{(m)}^T \boldsymbol{\sigma}_{int} dx dy dz = \sum_m \iiint \mathbf{B}_{(m)}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_{th} dx dy dz \quad (6.10)$$

ここに、 $\mathbf{I} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  であり、全体剛性方程式は以下ようになります。

$$\bar{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{R}}_{int} \quad (6.11)$$

以降の手順は前述の荷重作用による解析手順と同じであり省略しますが、外荷重ベクトル  $\mathbf{R}_p$  と初期荷重ベクトル（温度荷重とも呼ばれている） $\bar{\mathbf{R}}_{int}$  を同時に受ける場合には、それらの和： $\bar{\mathbf{R}}_p + \bar{\mathbf{R}}_{int}$  を節点荷重ベクトルとするだけでよいことになります。

**質問 6.2** 非弾性解析や弾塑性解析について教えて欲しい。

**回答 6.2** 図 6.1 には、各種の材料での応力( $\boldsymbol{\sigma}$ )–ひずみ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ )関係のモデルを示しています。図において、(a)直線関係で負荷径路と除荷径路が同じものを“線形弾性”，(b)曲線関係で負荷径路と除荷径路が同じものを“非線形弾性”，(c)曲線関係でかつ負荷径路と除荷径路が異なるものを“弾塑性”，(d)負荷径路と除荷径路が異なるが、それぞれが直線関係であるものを“完全塑性”と呼んでいます。

ところで、すでに述べたように、線形弾性モデルでの応力ベクトル( $\boldsymbol{\sigma}$ )とひずみベクトル( $\boldsymbol{\varepsilon}$ )

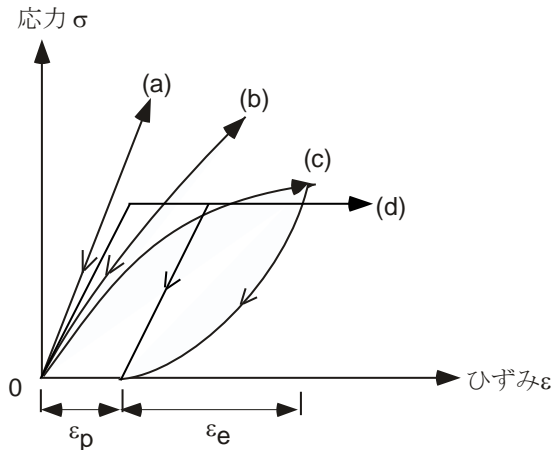


図 6.1 各種の応力-ひずみ関係のモデル

の関係は以下のように表されます。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6.12)$$

ここに、 $\mathbf{C}$  : 弾性係数行列であり、 $\mathbf{C}$  はヤング率 ( $E$ ) とポアソン比 ( $\nu$ ) によって構成されます。

つぎに、非線形弾性体では、式(6.12)の  $\mathbf{C}$  が応力またはひずみの大きさによって変化し、以下のように表されます。

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{C}}\boldsymbol{\varepsilon}, \text{ または } d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}'d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.13)$$

ここに、 $d\boldsymbol{\sigma}$  は微小応力増分、 $d\boldsymbol{\varepsilon}$  は微小ひずみ増分であり、 $\tilde{\mathbf{C}}$  は割線弾性係数行列、 $\mathbf{C}'$  は接線弾性係数行列と呼ばれています。

非線形弾性構造の FEM 解析では、荷重ベクトル ( $\mathbf{R}$ ) を微小増分 ( $\Delta\mathbf{R}$ ) に分割し、任意時刻 ( $t$ ) での荷重 ( ${}^t\mathbf{R}$ ) を  $\Delta\mathbf{R}$  ごとに増加させて、繰返するのが一般的であります。すなわち、 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} = {}^t\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R}$  とし、対応する節点変位を  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}$  として、初期状態から  $t = \Delta t, 2\Delta t, \dots$  と順次計算して行きます。したがって、各増分ステップでは、 $t$  時刻の全体剛性方程式:  ${}^t\bar{\mathbf{K}}{}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{R}$  を用いて、 $t + \Delta t$  の全体剛性方程式:  ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{K}}{}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$  の解を求める反復・収束計算が必要になります。具体的には、

$${}^t\mathbf{F} = \sum_m \iiint \mathbf{B}_{(m)}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}_{(m)} d x d y d z \mathbf{U} \approx \sum_m \iiint \mathbf{B}_{(m)}^T {}^t\boldsymbol{\sigma} d x d y d z \quad (6.14)$$

とおき、 $t$  時刻の全体剛性方程式を

$${}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (6.15)$$

と表します。すなわち、式(6.15)は節点における外荷重と内力の釣り合い条件を意味しています。

つぎに、 $t + \Delta t$  時刻のつり合い条件

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (6.16)$$

を反復・収束計算によって解きますが、一般に、修正ニュートン法と呼ばれる手法がよく用いられますので、以下のこの方法を説明します。

まず、接線弾性係数行列:  ${}^t\mathbf{C}'$  を用いて、

$${}^t\mathbf{K}'\Delta\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}, \quad {}^t\mathbf{K}' = \sum_m \iiint \mathbf{B}_{(m)}^T {}^t\mathbf{C}' \mathbf{B}_{(m)} d x d y d z \quad (6.17)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U} \quad (6.18)$$

とし、初期条件として、

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F} \quad (6.19)$$

を用い、以下の反復計算 ( $i$ ) を行います。

$${}^t\mathbf{K}'\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (6.20)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)} \quad (6.21)$$

反復回数： $i=1,2,3,\dots$ とし、 $\Delta\mathbf{U}^{(i)}$ が十分に小さく、収束値： ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)}$ が得られた時点で、つぎの荷重ステップに移り同様の計算を行うことにより、全荷重段階での節点変位および要素内の応力等が決定できることとなります。

なお、非弾性解析と弾塑性解析での相違点は、前者では負荷径路と除荷径路が同じであるので、荷重増分 $\Delta\mathbf{R}$ がさほど小さくなくても反復計算における収束値が得やすいが、弾塑性解析では、負荷径路と除荷径路が異なるので、 $\Delta\mathbf{R}$ を小さく採り荷重ステップ数を増やし、除荷の判定を精度良く行わないと、誤差を累積してしまうので注意を要します。したがって、精度良い解析結果を得るためには、非線形弾性解析に比べて弾塑性解析ははるかに難しいと言わねばなりません。

**質問 6.3** FEMによるクリープ解析について教えて欲しい。

**回答 6.3** コンクリートに対する一軸応力状態でのクリープ現象は、広範に研究されていますが、多軸応力下でのクリープ現象についてはまだまだ不明な点が多いように思います。したがって、一般的な取り扱いについて説明します。

クリープ変形に伴う微小時間 $\Delta t$ での応力ベクトル ${}^t\boldsymbol{\sigma}$ の変化は以下のように表されます。

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + \int_t^{t+\Delta t} {}^t\mathbf{C} \cdot d(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{cc}) \quad (6.23)$$

ここに、 ${}^t\mathbf{C}$ は材齢 $t$ での弾性係数行列、 $d\boldsymbol{\varepsilon}$ は全ひずみ増分、 $d\boldsymbol{\varepsilon}_{cc}$ はクリープひずみ増分であり、

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon} &= [d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad d\varepsilon_z \quad d\gamma_{xy} \quad d\gamma_{yz} \quad d\gamma_{zx}]^T \\ d\boldsymbol{\varepsilon}_{cc} &= [d\varepsilon_x^c \quad d\varepsilon_y^c \quad d\varepsilon_z^c \quad d\gamma_{xy}^c \quad d\gamma_{yz}^c \quad d\gamma_{zx}^c]^T, \\ {}^t\boldsymbol{\sigma} &= [{}^t\sigma_x \quad {}^t\sigma_y \quad {}^t\sigma_z \quad {}^t\tau_{xy} \quad {}^t\tau_{yz} \quad {}^t\tau_{zx}]^T \end{aligned} \quad (6.24)$$

一軸応力下のコンクリートのクリープ特性については、土木学会コンクリート標準示方書では以下のように与えられています。

$$\dot{\varepsilon}_{cc} = \varphi \cdot \dot{\sigma}_{cp} / E_{ct} \quad (6.25)$$

ここに、 $\varepsilon_{cc}$ ：圧縮クリープひずみ、 $\varphi$ ：クリープ係数、 $E_{ct}$ ：載荷時材齢でのヤング率です。また、圧縮強度が $55\text{N/mm}^2$ 以下の普通コンクリートがその40%以下の持続する圧縮応力を受ける場合の単位応力当たりのクリープひずみは以下のように与えられています。

$$\varepsilon_{cc}'(t, t', t_0) / \sigma_{cp}' = [1 - \exp\{-0.09(t - t')^{0.6}\}] \cdot \varepsilon_{cr}' \quad (6.26)$$

ここに、

$\varepsilon_{cr}'$ ：単位応力当たりの基本クリープひずみと乾燥クリープひずみの和の最終値

$t_0$ ：乾燥開始材齢(日)、 $t'$ ：載荷時材齢(日)、

$t$ ：着目時点の材齢(日)、である。

式(6.26)は線形クリープ理論に基づくものであり、クリープひずみの大きさは応力に比例するとしており、図6.2に示すように、載荷荷重が材齢 $t$ につれて変化する場合でも式(6.26)を重ね合わせることによって、全クリープひずみが求められることを意味しています。

つぎに、クリープ変形は非圧縮性であることを考慮して、多軸応力状態での材齢 $t$ での等価応力 ${}^t\bar{\sigma}$ および等価クリープひずみ ${}^t\bar{\varepsilon}_{cc}$ を以下のように定義します。

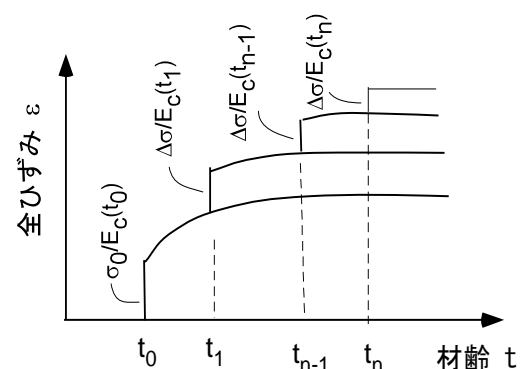


図 6.2 弾性ひずみとクリープひずみ

$${}^t\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij}^t s_{ij}^t}, \quad {}^t\bar{\varepsilon}_{cc} = \sqrt{\frac{3}{2} e_{ij}^{c,t} e_{ij}^{c,t}} \quad (6.27)$$

ここに、 ${}^t s_{ij}$  : 材齢  $t$  での偏差応力テンソル、 ${}^t e_{ij}^c$  : 材齢  $t$  での偏差クリープひずみテンソルであり、式(6.23)と等価な関係として

$${}^t\bar{\varepsilon}_{cc} = \varepsilon'_{cr} \left[ 1 - \exp\left\{-0.09(t-t')^{0.6}\right\} \right] {}^t\bar{\sigma} \quad (6.28)$$

を与え、材齢  $t$  での等価クリープひずみの変化率として

$$\frac{d{}^t\bar{\varepsilon}_{cc}}{dt} = 0.054 \varepsilon'_{cr} \exp\left\{-0.09(t-t')^{0.6}\right\} {}^t\bar{\sigma} \quad (6.29)$$

を得ます。したがって、

$${}^t\gamma = \frac{3}{2{}^t\bar{\sigma}} \cdot \frac{d{}^t\bar{\varepsilon}_{cc}}{dt} \quad (6.30)$$

なる正のスカラー係数を導入し、材齢  $t$  での応力ベクトル ( ${}^t\sigma$ ) とクリープひずみ増分ベクトル ( $d\varepsilon_{cc}$ ) の関係を以下のように表します。

$$d\varepsilon_{cc} = ({}^t\gamma \mathbf{D}^t \sigma) \cdot dt \quad (6.31)$$

ここに、

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

式 (6.23) の  ${}^{t+\Delta t}\sigma$  は、前述の**回答 6.2** での非弾性問題の解析に準じた計算法により求められる。

$${}^{t+\Delta t}\sigma = (1-\alpha){}^t\sigma + \alpha {}^{t+\Delta t}\sigma \quad (6.31)$$

ここに、 $0 \leq \alpha \leq 1$  で、 $\alpha = 0$  は前進差分法、 $\alpha > 0$  は陰解法と呼ばれており、反復・収束計算は、

初期条件： ${}^{t+\alpha\Delta t}\sigma_{(0)}^{(i-1)} = {}^t\sigma$  の下に

$$\text{反復計算： } {}^{t+\Delta t}\sigma_{(k)}^{(i-1)} = {}^t\sigma + {}^t\mathbf{C} \left[ \varepsilon - \Delta t {}^{t+\alpha\Delta t}\gamma_{(k-1)}^{(i-1)} \mathbf{D}^{t+\alpha\Delta t} \sigma_{(k-1)}^{(i-1)} \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.32)$$

ここに、各記号の右上添え字  $(i-1)$  は反復回数を、右下添え字  $(k)$  は収束回数を意味しており、収束判定は

$$\frac{\left\| {}^{t+\Delta t}\sigma_{(k)}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t}\sigma_{(k-1)}^{(i-1)} \right\|_2}{\left\| {}^{t+\Delta t}\sigma_{(k)}^{(i-1)} \right\|_2} \leq \text{ctol} \quad (6.33)$$

ここに、 $\| \cdot \|_2$  はユークリッドノルム、ctol は許容誤差を意味しています。なお、収束を早めための各種の計算法が開発されているので、専門書を参考にしてください。

つづく