

材料非線形問題の FEM 解析の基本事項

1. 材料非線形とは？

構造解析に用いる材料モデルには、(a)線形弾性、(b)非線形弾性、(c)弾塑性、などがあるが、それらのモデルでの応力・ひずみ関係を示せば、図 1.1 のようになる。

(a) 線形弾性では直線であり、(b)非線形弾性では曲線であるが、両者とも負荷経路と除荷経路が同じである。すなわち、応力の増加につれてひずみが増加するが、応力を取り除くとひずみが完全に回復する性質を弾性という。一方、応力を取り除いてもひずみが残留する性質を塑性と呼び、(c)弾塑性は、弾性と塑性が混在した性質で、応力を取り除くと回復するひずみ ϵ_e

(弾性ひずみ) と残留するひずみ ϵ_p (塑性ひずみ) が混じり合っている。また、(d)のように弾塑性曲線が 2本の直線で表され、弾性域での勾配と塑性域からの除荷直線の勾配が同じであるモデルを完全塑性モデルという。

鋼やコンクリート材料は極く低い応力レベルでは線形弾性モデルによる取り扱いで十分な場合が多いが、応力レベルが高くなると、鋼では降伏による非線形性が大きく現れ、コンクリートでは、引張側ではひび割れによる非線形性や圧縮側では微視的な破壊の進展や圧壊による非線形性が大きく現れる。

以上のような材料の非線形性を考慮した構造解析の問題を“材料非線形問題”と呼んでいる。

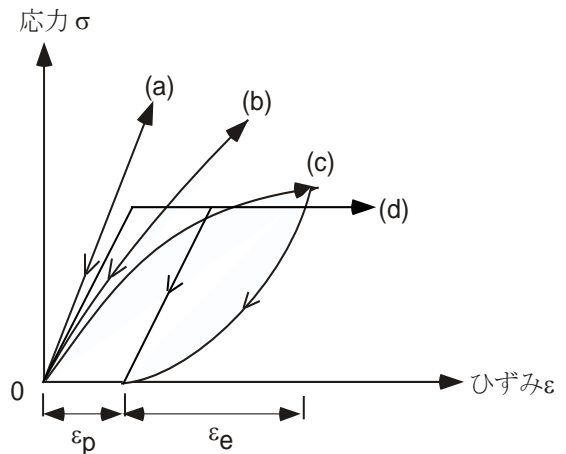


図 1-1 応力・ひずみ曲線

2. 材料非線形問題の FEM 解析法

前節ですでに述べたことであるが、FEM 解析の基礎式は、要素(a)に関して、

$${}^t \boldsymbol{\epsilon}^{(a)} = {}^t \mathbf{B}^{(a)} {}^t \mathbf{U} \quad (2.1)$$

ここに、 ${}^t \boldsymbol{\epsilon}^{(a)}$: 荷重レベル t (以下、t 時刻と呼ぶ) のひずみベクトル、 ${}^t \mathbf{B}^{(a)}$: ひずみ行列、 ${}^t \mathbf{U}$: 節点変位ベクトルであり、応力とひずみ関係は

$${}^t \boldsymbol{\sigma}^{(a)} = {}^t \mathbf{C} {}^t \boldsymbol{\epsilon}^{(a)} \quad (2.2)$$

ここに、 ${}^t \boldsymbol{\sigma}^{(a)}$: t 時刻の応力、 ${}^t \mathbf{C}$: t 時刻の割線弾性係数 (${}^t \boldsymbol{\sigma}^{(a)} / {}^t \boldsymbol{\epsilon}^{(a)}$) である。ポテンシャルエネルギー極小の原理 (仮想仕事の原理でもある) より、t 時刻での表面力や物体力のような荷重ベクトルを ${}^t \mathbf{R}$ とすれば、内力 ${}^t \mathbf{F}$ と外力 ${}^t \mathbf{R}$ のつりあい条件は

$${}^t \mathbf{R} = {}^t \mathbf{F}, \quad (2.3)$$

ここに、

$${}^t \mathbf{R} = {}^t \mathbf{K} {}^t \mathbf{U}, \quad (2.4)$$

$${}^t \mathbf{F} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} {}^t \mathbf{B}^{(a)T} {}^t \mathbf{C} {}^t \mathbf{B}^{(a)} dV^{(a)} \cdot {}^t \mathbf{U} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} {}^t \mathbf{B}^{(a)T} {}^t \boldsymbol{\sigma} dV^{(a)} \quad (2.5)$$

ここに、 ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ は t 時刻での要素内の応力を示している。

微小変位理論の適用範囲内での材料非線形問題では、 ${}^t \mathbf{B}^{(a)}$ は一定値 ($\mathbf{B}^{(a)}$) であるので、剛性行列は以下のように与えられる。

$${}^t \mathbf{K} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} \mathbf{B}^{(a)T} {}^t \mathbf{C} \mathbf{B}^{(a)} dV^{(a)} \quad (2.6)$$

さて、材料非線形問題では、任意の時刻 t での式(2.3)を解く必要がある。式(2.3)の一般的な解法は、荷重レベルを ${}^0\mathbf{R}$, ${}^1\mathbf{R}$, ${}^2\mathbf{R}$, ..., ${}^n\mathbf{R}$ のように分割し、 t 時刻での解: ${}^t\mathbf{U}$ と ${}^t\boldsymbol{\sigma}$ を用いて、 $t + \Delta t$ レベルのつりあい条件

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} \mathbf{B}^T {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} dv^{(a)} \quad (2.7)$$

の解: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ を見出すことになる。

図 2-1 は一般的によく用いられている修正 Newton 反復法を示している。この方法は t レベルでの剛性行列 ${}^t\mathbf{K}$ を用いて、反復計算の収束値により $t + \Delta t$ レベルの解: ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ を見出す点に特徴がある。この方法での反復計算手順は以下のとおりである。

初期条件($i = 0$)として、

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U}; \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F} \quad (2.8)$$

を用い、反復回数(i)での収束計算スキームは

$${}^t\mathbf{K}\Delta\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)}, \quad (2.9)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)} \quad (2.10)$$

ここに、

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i)} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} \mathbf{B}^T {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i)} dV^{(a)}, \quad (2.11)$$

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} + {}^t\mathbf{C}^{(i)}\mathbf{B}\Delta\mathbf{U}^{(i)} \quad (2.12)$$

である。

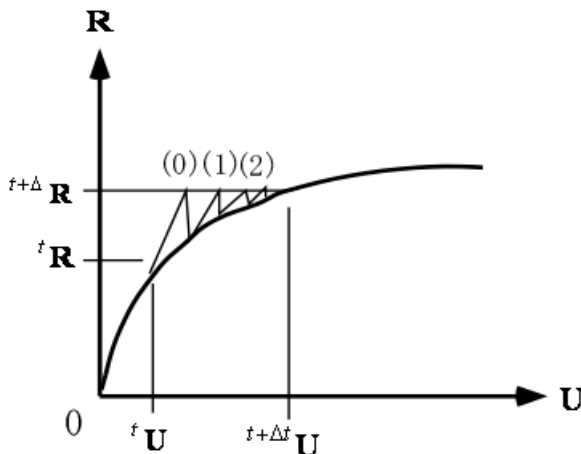


図 2-1 修正 Newton 反復法

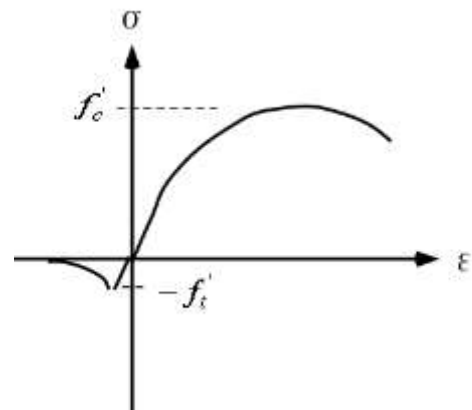


図 2-2 コンクリートの応力・ひずみ曲線

反復計算法には、修正 Newton 法の外に、初期剛性法や割線剛性法などがあるが、それらの詳細は割愛する。

3. FEM 解析に用いられる材料非線形モデル

鋼やコンクリートのような実際の材料の応力・ひずみ関係は複雑であり、FEM 解析ではそれらの関係を一定の理想化したモデルを用いられている。この種のモデルは、図 1-1 に示したように、(a)線形弾性モデル、(b)非線形弾性モデル、(c)弾・塑性モデル、(d)完全塑性モデル、などがあり、材料非線形解析では(a)以外のモデルが適用されている。

3.1 非線形弾性モデル

このモデルは、図 1-1 での曲線(b)による応力・ひずみ関係を有するものであり、負荷過程と除荷過程が同じ曲線上を辿るモデルである。図 2-2 に示すコンクリートの応力・ひずみ曲線 (図 2-2 では、圧縮応力を正) において、負荷径路と除荷径路の相違が大きくなり、残留ひずみの影響があ

より重要でない問題の解析には、この種のモデルが用いられることが多い。

たとえば、等方・等質材料のコンクリートの圧縮領域での非線形応力-ひずみ関係は以下のように表わせる。

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= K_0 \varepsilon_0 (1 + a\varepsilon_0 + b\varepsilon_0^2 + c\varepsilon_0^3 + \dots) \\ \tau_0 &= G_0 \gamma_0 (1 + a'\gamma_0 + b'\gamma_0^2 + c'\gamma_0^3 + \dots)\end{aligned}\tag{3.1}$$

ここに、 a, b, c, \dots は非線形曲線を表わす係数であり、 E_0, ν_0 を初期状態でのそれぞれ弾性係数およびポアソン比とすれば、 $3K_0 = E_0 / (1 - 2\nu_0)$ は初期体積弾性係数、 $G_0 = 0.5E_0 / (1 + \nu_0)$ は初期せん断弾性係数を意味する。

たとえば、2軸圧縮応力下での実験では、図 3.1 のようになり、この曲線に当てはまるように各係数が決定される。 σ_0 は八面体直応力、 τ_0 は八面体せん断応力と呼ばれており、主応力場では以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \tau_0 &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \gamma_0 &= \frac{1}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}\end{aligned}\tag{3.2}$$

式(3.1)より、

$$\begin{aligned}d\sigma_0 &= K_0 d\varepsilon_0 (1 + 2a\varepsilon_0 + 3b\varepsilon_0^2 + 4c\varepsilon_0^3 + \dots) \\ d\tau_0 &= G_0 d\gamma_0 (1 + 2a'\gamma_0 + 3b'\gamma_0^2 + 4c'\gamma_0^3 + \dots)\end{aligned}\tag{3.3}$$

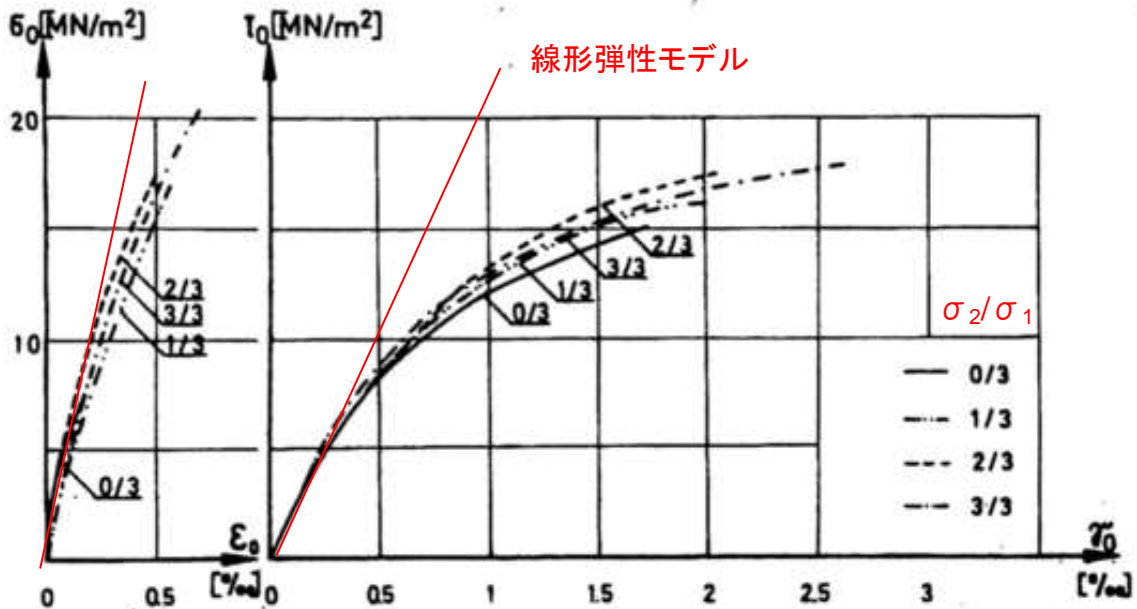


図 3.1 2軸圧縮応力下でのコンクリートの応力-ひずみ曲線（実験値）

図 3.1 のような、実験曲線から a, b, c, \dots の各係数を決めれば、式(3.3)の対応する接線弾性係数は

$$3K(\varepsilon_0) = \frac{d\sigma_0}{d\varepsilon_0}, \quad 2G(\gamma_0) = \frac{d\tau_0}{d\gamma_0}\tag{3.4}$$

各ひずみテンソルは

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij} + e\delta_{ij}, & e &= \varepsilon_{kk} \\ e_{ij} &= s_{ij}/2G(\gamma_0), & e &= s/3K(\varepsilon_0) \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - s\delta_{ij}, & s &= \sigma_{kk}/3 \end{aligned} \tag{3.5}$$

ここに、 δ_{ij} : クロネッカーデルタ (単位テンソル), として求められる.

土木学会コンクリート標準示方書では, コンクリートの 1 軸圧縮状態での応力・ひずみ曲線が図 3.2.1 のように与えられている.

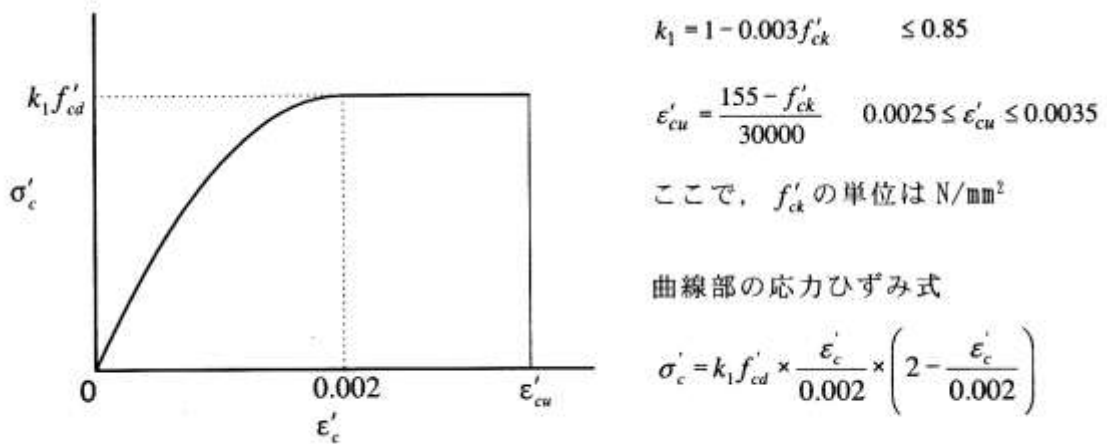


図 3.2.1 コンクリートの応力-ひずみ曲線

図の応力・ひずみ曲線での初期弾性係数は

$$E_0 = \frac{k_1 f'_{cd}}{0.001} \tag{3.6}$$

また, 初期ポアソン比は, 一般に, $\nu_0 \approx 1/6$ と言われているので,

$$G_0 = \frac{E_0}{2 \times (1 + \nu_0)} \tag{3.7}$$

$$3K_0 = \frac{E_0}{1 - 2\nu_0} \tag{3.8}$$

と表される.

つぎに, 図 3.2 に示すような 3 軸圧縮状態でのコンクリートの強度は, 図 3.3 のように終局強度が側方圧力の存在によって大きく変化するので, 終局強度解析の問題は別とし, 破壊時点よりかなり前での変形解析に対する応力・ひずみ関係として図 3.3 に示すような応力・ひずみ曲線が利用できる.

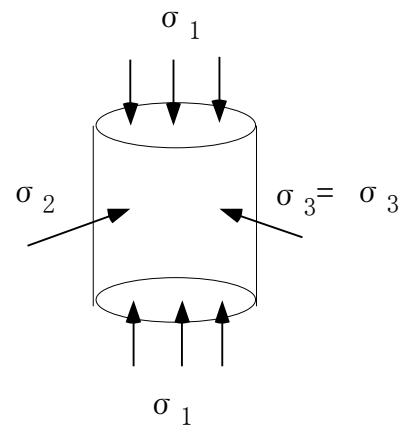


図 3.2 3 軸圧縮状態

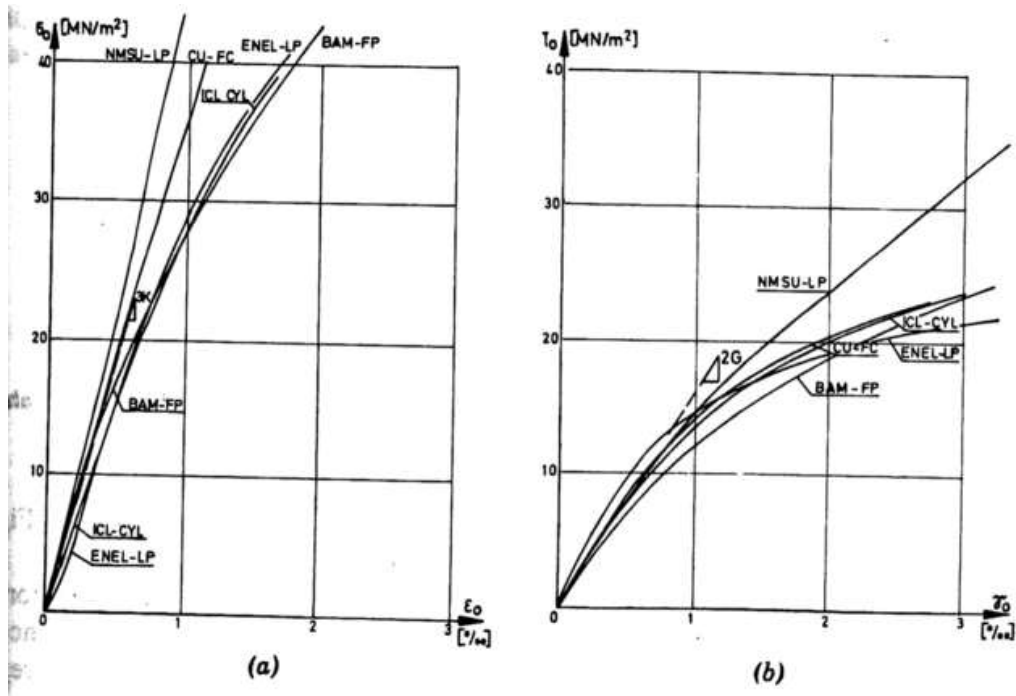


図 3.3 3 軸圧縮状態での応力・ひずみ曲線 (実験値)

3.2 脆性破壊モデル

図 2.2 で示した、コンクリートの引張領域での応力・ひずみ曲線は、ひび割れ発生直前よりひずみエネルギーを開放し、ひび割れ幅の増大につれて強度を喪失し、ある一定のひび割れ幅以上では引張強度がゼロになると言われている。このようにひずみの増大につれて強度が低下するモデルを脆性破壊モデルと呼ばれている。

一般に、ひずみの増加とともに応力が減少する特性をひずみ軟化特性と呼んでいる。したがって、

3.2.4 引張軟化特性

(1) コンクリートの破壊エネルギー G_F は、一般の普通コンクリートに対して、式 (3.2.8) により求めてよい。

$$G_F = 10(d_{\max})^3 \cdot f_{ck}^{1/3} \quad (\text{N/m}) \quad (3.2.8)$$

ここに、 d_{\max} : 粗骨材の最大寸法 (mm)

f_{ck} : 圧縮強度の特性値 (設計基準強度) (N/mm²)

(2) 引張軟化曲線は、図 3.2.2 に示したモデル化されたものを使用してもよい。

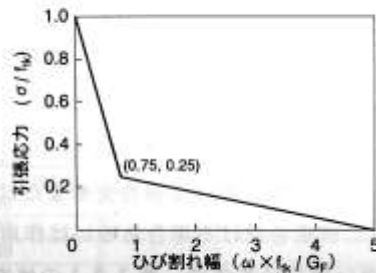


図 3.2.2 引張軟化曲線

脆性破壊モデルはひずみ軟化モデルでもある。引張領域のコンクリートのように引張強度に相当するピーク値を超えた後の応力の減少率は鉄筋のような周辺の拘束条件に大きく支配される。図 3.2.2 は、土木学会コンクリート標準示方書でのコンクリートの引張軟化曲線である。

この種のひずみ軟化を有する構造の解析には、3.1 の非線形弾性モデルの適用が考えられ、ひび割れ幅が増大し、引張強度がゼロになった後には圧縮のみに抵抗する材料として取り扱われる。

3.3 完全塑性モデル

図 1-1 の曲線(c)のように、応力・ひずみ曲線において、弾性領域では直線、塑性領域では一定応力（降伏値）の下で流動し、除荷時には弾性状態に戻るモデルを完全塑性モデルという。構造用の軟鋼ではこのようなモデルで取り扱うことが多い。

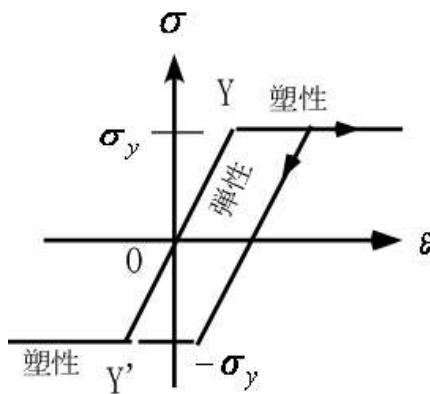


図 3.4 一軸応力・ひずみ曲線

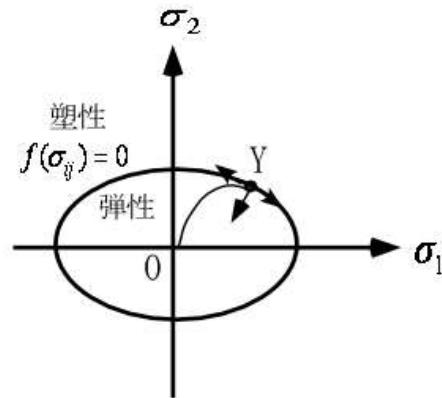


図 3.5 多軸応力状態と降伏曲面

一軸応力状態での応力・ひずみ曲線は図 3.4 のように表せる。図中の領域： $Y' - 0 - Y$ は弾性領域であり、 Y または Y' を超え、降伏応力： $\pm \sigma_y$ の下で流動する領域が塑性領域であり、降伏領域からの除荷経路では一定の塑性ひずみ： ϵ_p を保持したままで弾性領域に復元する。多軸応力状態での応力経路は、図 3.5 に示すように、降伏曲面： $f(\sigma_{ij}) = 0$ に到達した後に塑性流動が起こり、負荷過程では降伏曲面上に留まり、除荷過程では弾性復元する。

鋼やアルミニウムのような金属材料では、降伏は微視的なせん断すべりに集積によって起こる現象であり、水圧のような等方圧力の下では降伏しないことが実験的に確認されている。したがって、降伏条件である $f(\sigma_{ij}) = 0$ は、等方応力： $-p = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ に依存しなく、等方応力成分を抜いた偏差応力成分、たとえば、3次元応力場での主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ で表せば、

$$s_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad s_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}, \quad s_3 = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (3.9)$$

金属材料の降伏条件として知られる von Mises の規準は以下のように与えられている。

$$f(s_{ij}) = J_2 - k^2 = 0 \quad (3.10)$$

ここに、 k はせん断降伏応力で、一軸降伏応力を σ_y とすれば、 $k = \sigma_y / \sqrt{3}$ であり、 J_2 は偏差応力テンソル s_{ij} の 2 次不変量であり、以下のように与えられる。

$$J_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \quad (3.11)$$

式(3.10)を式(3.9)に代入すれば、3次元主応力場での降伏条件は以下の表せる。

$$f(s_i) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2k^2 = 0 \quad (3.12)$$

または,

$$f(\sigma_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - 3k^2 = 0 \quad (3.13)$$

式(3.12)が描く図形は、3主応力空間において図 3.6 のようになり、静水圧軸： $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ を母線を有する円筒面になり、その断面は半径： $k/2$ の円で、偏差主応力面（ π 平面と呼ばれている）で式(3.11)のように表されている。

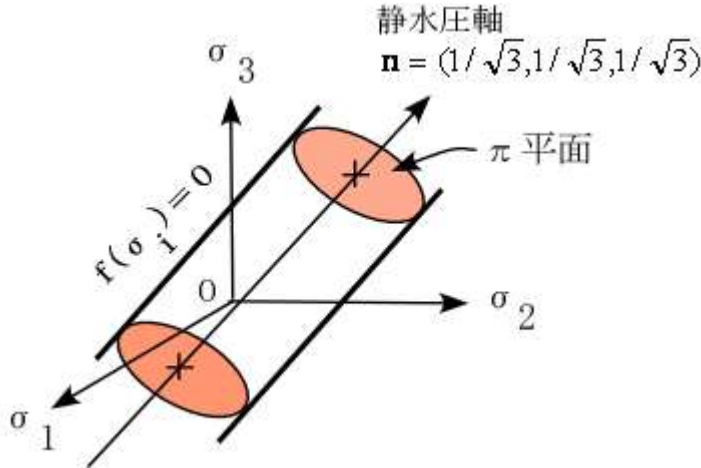


図 3.6 3主応力場での von Mises の降伏条件

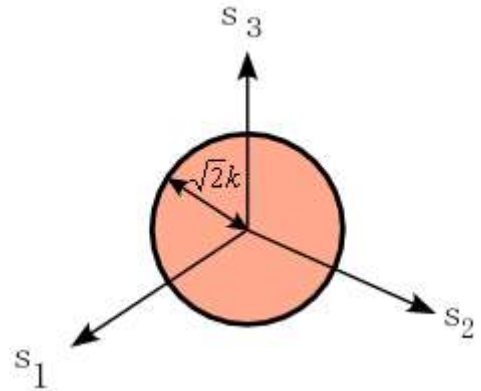


図 3.7 π 平面上の降伏条件

さて、完全塑性モデルでの構成関係は、関連流動則に基づけば以下のように与えられる。

弾性則：

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.14)$$

ここに、 $d\boldsymbol{\sigma}$ ：応力増分ベクトル， \mathbf{C} ：弾性係数行列， $d\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ：弾性ひずみ増分ベクトル，

$d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ：塑性ひずみ増分ベクトル， $d\boldsymbol{\varepsilon}$ ：全ひずみ増分ベクトル（ $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ ）であり，

関連流動則：

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\mu \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.15)$$

ここに、 $d\mu$ ：塑性流れ係数（ $d\mu > 0$ ）であり，

完全塑性体に対する適応の条件は以下のように表せる。

$$df = \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (3.16)$$

応力テンソルを静水圧成分(s)と偏差応力成分(s_{ij})，すなわち

$$s = \frac{\sigma_{kk}}{3}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - s\delta_{ij} \quad (3.17)$$

ここに、 δ_{ij} ：クロネッカーデルタ，に分解し、ひずみテンソルを等方成分(e)と偏差ひずみ成分(e_{ij})，すなわち

$$e = \frac{\varepsilon_{kk}}{3}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij} \quad (3.18)$$

に分解すれば、線形弾性体の応力増分とひずみ増分の関係は

$$ds = 3K \cdot de, \quad ds_{ij} = 2G \cdot de_{ij} \quad (3.19)$$

ここに、 $3K$ ：体積弾性係数， G ：せん断弾性係数で、

$$3K = \frac{E}{1-2\nu}, \quad G = \frac{E}{1-2\nu} \quad (3.20)$$

また、式(3.19)から、応力増分ベクトル $d\boldsymbol{\sigma} = [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\sigma_z \quad d\tau_{xy} \quad d\tau_{yz} \quad d\tau_{xz}]^T$ と弾性ひずみ増分ベクトル $d\boldsymbol{\varepsilon}^e = [d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad d\varepsilon_z \quad d\gamma_{xy} \quad d\gamma_{yz} \quad d\gamma_{xz}]^T$ の関係を示せば、

$$d\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.21)$$

となる。

式(3.15)による塑性ひずみ増分は

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial J_2}{\partial s_{ij}} = d\lambda \cdot s_{ij} \quad (3.22)$$

すなわち、von Mises の降伏条件に従う塑性ひずみ増分は塑性偏差ひずみ増分のみであり、塑性等方ひずみ増分はゼロとなる、したがって、

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e, \quad de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p = \frac{1}{2G} \cdot ds_{ij} + d\lambda \cdot s_{ij} ds_{ij} \quad (3.23)$$

となり、完全塑性状態での適応の条件より、

$$f = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} - k^2 = 0, \quad df = \frac{\partial J_2}{\partial s_{ij}} ds_{ij} = s_{ij} ds_{ij} = 0 \quad (3.24)$$

したがって、

$$2G s_{ij} de_{ij}^e = 2G s_{ij} (de_{ij} - de_{ij}^p) = 2G (s_{ij} de_{ij} - d\lambda \cdot s_{ij} s_{ij}) = 2G (s_{ij} de_{ij} - 2k^2 d\lambda) = 0 \quad (3.25)$$

よって、

$$d\lambda = \frac{s_{ij} de_{ij}}{2k^2} \quad (3.26)$$

塑性流れ係数 ($d\lambda$) は非負であることより、式(3.26)は $d\lambda > 0$ のときのみ有効であり、 $d\lambda \leq 0$ の時は除荷径路に入り弾性回復するので、 $d\lambda = 0$ となる。

したがって、塑性状態での応力増分テンソルとひずみ増分テンソルの関係は

$$d\sigma_{ij} = ds \delta_{ij} + ds_{ij}, \quad (3.27)$$

$$ds = 3K \cdot de = K(d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z), \quad (3.28)$$

$$ds_{ij} = 2G \cdot (de_{ij} - d\lambda \frac{\partial f}{\partial s_{ij}}) = 2G \cdot (de_{ij} - \frac{s_{kl} de_{kl}}{2k^2} \cdot s_{ij}) \quad (3.29)$$

また、式(3.27)–(3.29)の関係を行列表示すれば、

$$d\boldsymbol{\sigma} = [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\sigma_z \quad d\tau_{xy} \quad d\tau_{yz} \quad d\tau_{xz}]^T, \quad (3.30)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = [d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad d\varepsilon_z \quad d\gamma_{xy} \quad d\gamma_{yz} \quad d\gamma_{xz}]^T, \quad (3.31)$$

$$ds = \frac{1}{3} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] d\boldsymbol{\sigma}, \quad de = \frac{1}{3} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.32)$$

$$d\mathbf{e} = [de_x \quad de_y \quad de_z \quad d\gamma_{xy} \quad d\gamma_{yz} \quad d\gamma_{xz}]^T \quad (3.33)$$

$$ds = K [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] d\mathbf{e}, \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} ds_x \\ ds_y \\ ds_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G - \mu s_x^2 & -\mu s_x s_y & -\mu s_x s_z & -s_x \tau_{xy} & -s_x \tau_{yz} & -s_x \tau_{xz} \\ -\mu s_y s_x & 2G - \mu s_y^2 & -\mu s_y s_z & -s_y \tau_{xy} & -s_y \tau_{yz} & -s_y \tau_{xz} \\ -s_z s_x & -s_z s_y & 2G - \mu s_z^2 & -s_z \tau_{xy} & -s_z \tau_{yz} & -s_z \tau_{xz} \\ -\mu s_x \tau_{xy} & -\mu s_y \tau_{xy} & -\mu s_z \tau_{xy} & G - \mu \tau_{xy}^2 & -\mu \tau_{xy} \tau_{yz} & -\mu \tau_{xy} \tau_{xz} \\ -\mu s_x \tau_{yz} & -\mu s_y \tau_{yz} & -\mu s_z \tau_{yz} & -\mu \tau_{xy} \tau_{yz} & G - \mu \tau_{yz}^2 & -\mu \tau_{xy} \tau_{xz} \\ -\mu s_x \tau_{xz} & -\mu s_y \tau_{xz} & -\mu s_z \tau_{xz} & -\mu \tau_{xy} \tau_{xz} & -\mu \tau_{xy} \tau_{yz} & G - \mu \tau_{xz}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} de_x \\ de_y \\ de_z \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

と表せる。

3.4 一般的な弾・塑性モデル

図 3.8 に示すような、ひずみ硬化を有する鋼材料や圧縮領域でのコンクリート材料などに適用される一般的な弾・塑性応力ひずみ関係に対しては、

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p, \quad d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{ij}^e, \quad d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.36)$$

ここに、 φ は負荷関数と呼ばれ、図 3.8 でのひずみ硬化特性に対応する関数で、一般に $\varphi = \varphi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ で応力テンソル σ_{ij} と塑性ひずみテンソル ε_{ij}^p の関数として表せる。なお、3.8 で述べた完全塑性モデルでは、負荷関数は初期降伏関数 $f(\sigma_{ij})$ と同じであり、 $\varphi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = f(\sigma_{ij})$ となる。

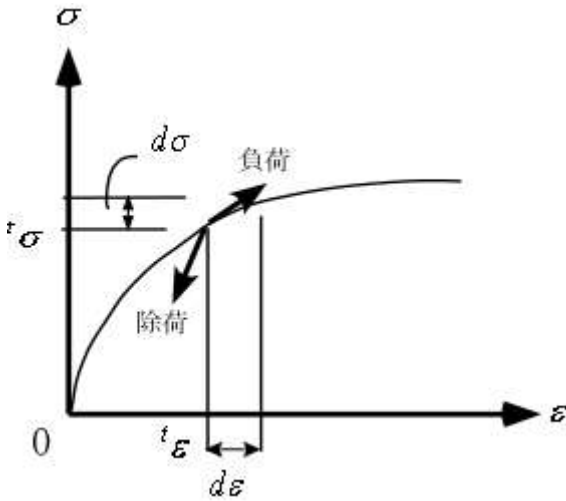


図 3.8 弾・塑性体の応力・ひずみ関係

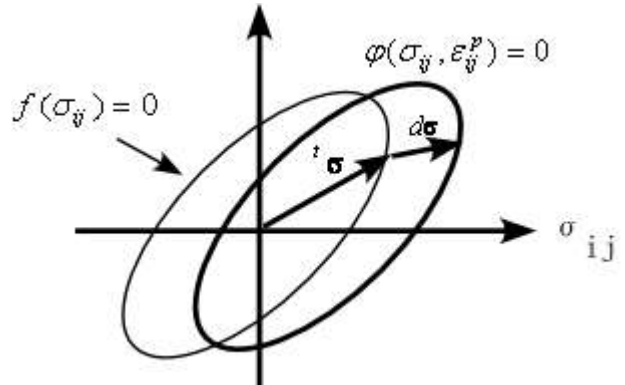


図 3.9 初期降伏関数と負荷関数

負荷関数 $\varphi(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ の選び方はいろいろ提案されており、(1)等方硬化モデル、(2)移動硬化モデル、(3)複合硬化モデル、に分類される。(1)等方硬化モデルは、図 3.10(a)に示すように、応力空間内で初期降伏曲線 ($f=0$) と相似形で拡大する負荷曲面 ($\varphi=0$) を表すモデルで正負応力繰り返し履歴の影響が少ない一方向応力径路問題の解析に適しており、(2)移動硬化モデルは、図 3.10(b)に示すように、負荷曲面は弾性領域の大きさを変えないで負荷応力の方向に平行移動してモデルであり、金属材料の正負の繰り返し応力問題に適していると言われている。また、(3)複合硬化モデルは、等方硬化モデルと移動硬化モデルを複合したものでより複雑な硬化則に適用したモデルであり、コンクリートや地盤材料の解析にはよく用いられている。

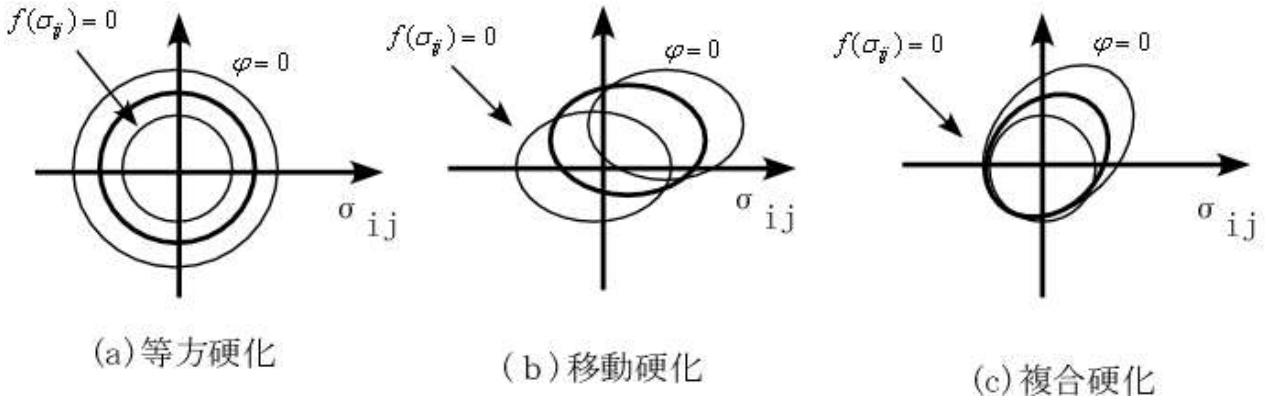


図 3.10 各種の硬化モデル

式(3.36)より,

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{ikl}^e = C_{ijkl} (d\varepsilon_{ikl} - d\varepsilon_{ikl}^p) = C_{ijkl} [d\varepsilon_{ikl} - d\lambda \frac{\partial \varphi(\sigma_{kl}, \varepsilon_{kl}^p)}{\partial \sigma_{kl}}] \quad (3.37)$$

適応の条件 ($d\varphi = 0$) より,

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad (3.38)$$

よって,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} [d\varepsilon_{ikl} - d\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{kl}}] + d\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (3.39)$$

したがって,

$$d\lambda = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{ikl} \quad (3.40)$$

ここに,

$$g = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.41)$$

式(3.41)は $d\lambda > 0$ の場合のみ有効であり, $d\lambda \leq 0$ の場合は除荷径路に入り, $d\lambda = 0$ として取り扱う.

最後に, 式(3.37)を行列表示すれば, 弾性係数テンソル C_{ijkl} を行列 \mathbf{C} とし,

$$\partial \bar{\varphi} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xz}} \right] \quad (3.42)$$

とおけば,

$$d\lambda = \frac{1}{g} \cdot \partial \bar{\varphi} \cdot \mathbf{C} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.43)$$

式(3.37)より

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\lambda \cdot \partial \bar{\varphi}^T) \quad (3.44)$$

となる.

以上