FEM勉強会（第４回）

その１、Gauss公式について

平成22年11月10日

園田　恵一郎

復習:有限要素変位解析法の基本式

要素分割

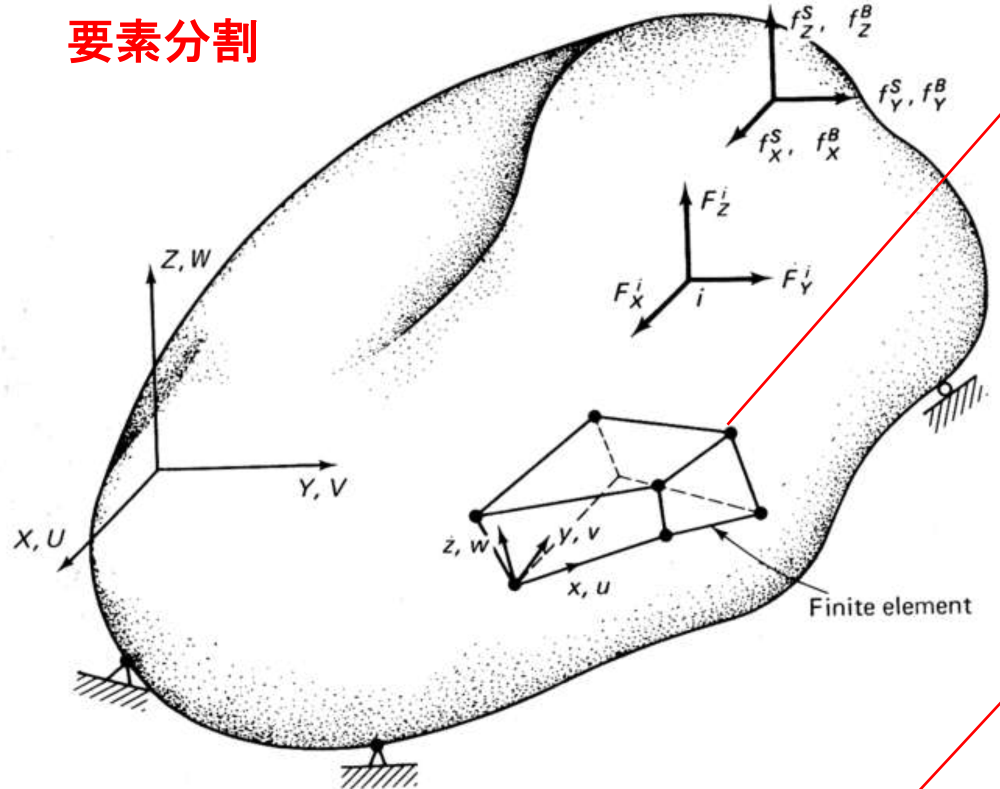


FIGURE 4.2 General three-dimensional body.

補間関数

$$\mathbf{u}^{(a)}(x,y,z)=\mathbf{H}^{(a)}(x,y,z)\cdot\hat{\mathbf{U}}$$

節点変位ベクトル

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(a)}(x,y,z)=\mathbf{B}^{(a)}(x,y,z)\cdot\hat{\mathbf{U}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(a)}=\mathbf{C}^{(a)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(a)}+\boldsymbol{\tau}_I^{(a)}$$

初期応力

荷重ベクトル

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{U}}=\mathbf{R}$$

全体剛性行列

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_B+\mathbf{R}_S-\mathbf{R}_I+\mathbf{R}_C$$

$$\mathbf{R}_B=\sum_a\int_{V^{(a)}}\mathbf{B}^{(a)T}\mathbf{C}^{(a)}\mathbf{B}^{(a)}dV^{(a)}$$

近似解析法:解は一つでない。

なぜ数値積分が必要か？

1次元積分

$$\int \mathbf{F}(r)dr = \sum_i \alpha_i \mathbf{F}(r_i) + \mathbf{R}_n$$

2次元積分

$$\iint \mathbf{F}(r,s)drds = \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j \mathbf{F}(r_i, s_j) + \mathbf{R}_n$$

3次元積分

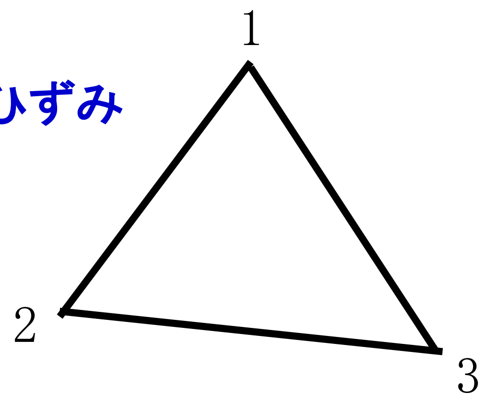
$$\iiint \mathbf{F}(r,s,t)drdsdt = \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j \sum_k \alpha_k \mathbf{F}(r_i, s_j, t_k) + \mathbf{R}_n$$

例：

$$\mathbf{K}_{(a)} = \int_{V^{(a)}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \cdot dv^{(a)} = t \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \mathbf{F}(r,s)drds$$

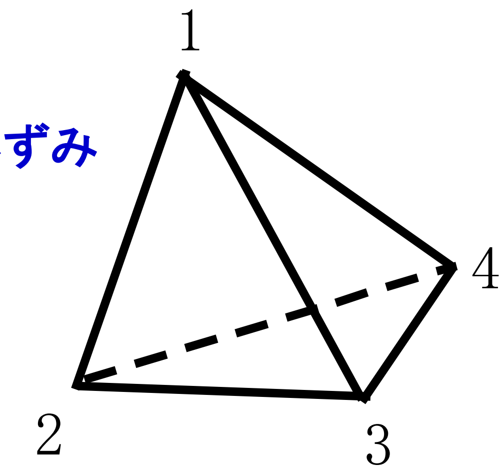
数値積分が必要な要素とは？

一定ひずみ要素

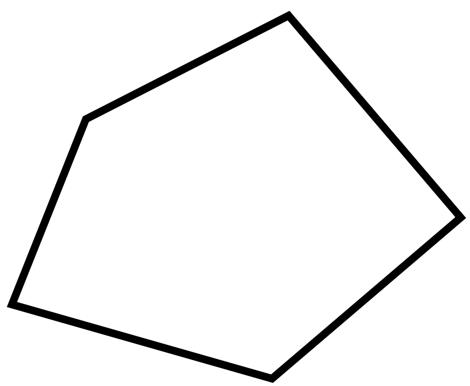


2次元:三角形要素

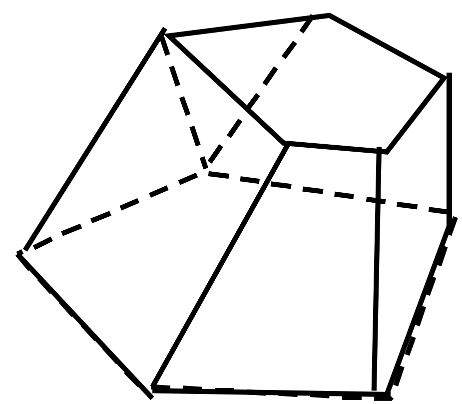
一定ひずみ要素



3次元:四面体要素



2次元:高次要素



3次元:高次要素

1次元数値積分法

数値積分とは、

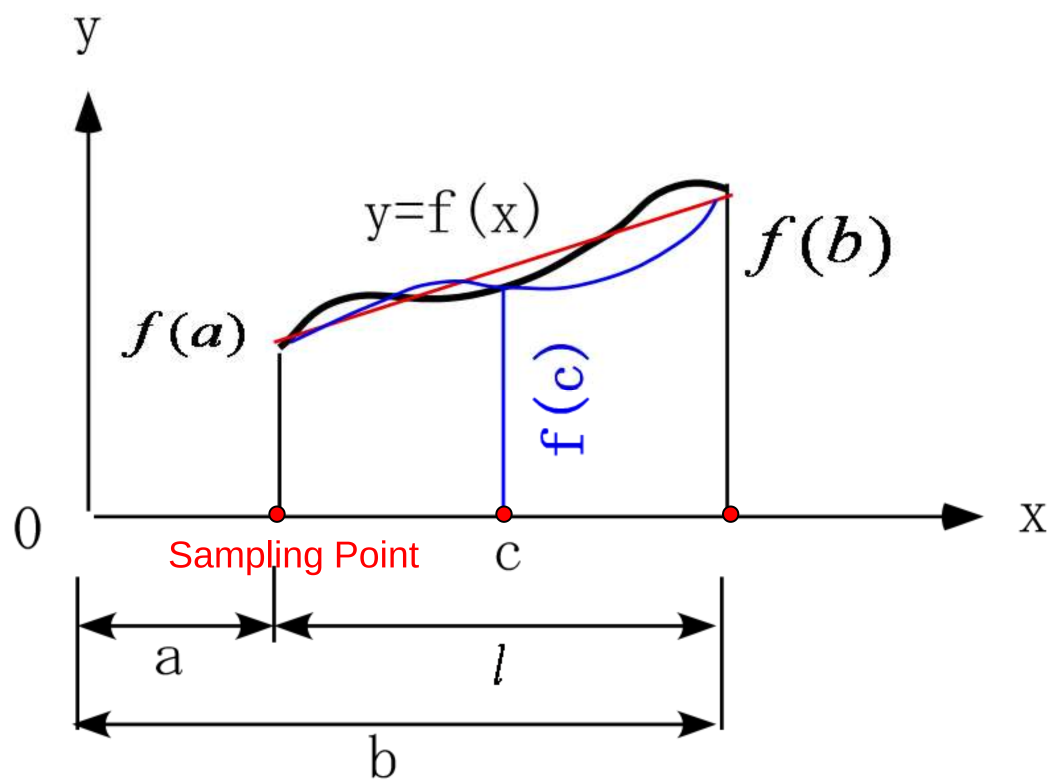
台形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{l}{2}(f(a)+f(b))$$

シンプソン公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{l}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)]$$

ただし，　$c=(a+b)/2$



ニュートン・コーツ式

$$\int_a^b \mathbf{F}(r)dr = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^n \mathbf{F}(r_i) + \mathbf{R}_n$$

n : 分割数

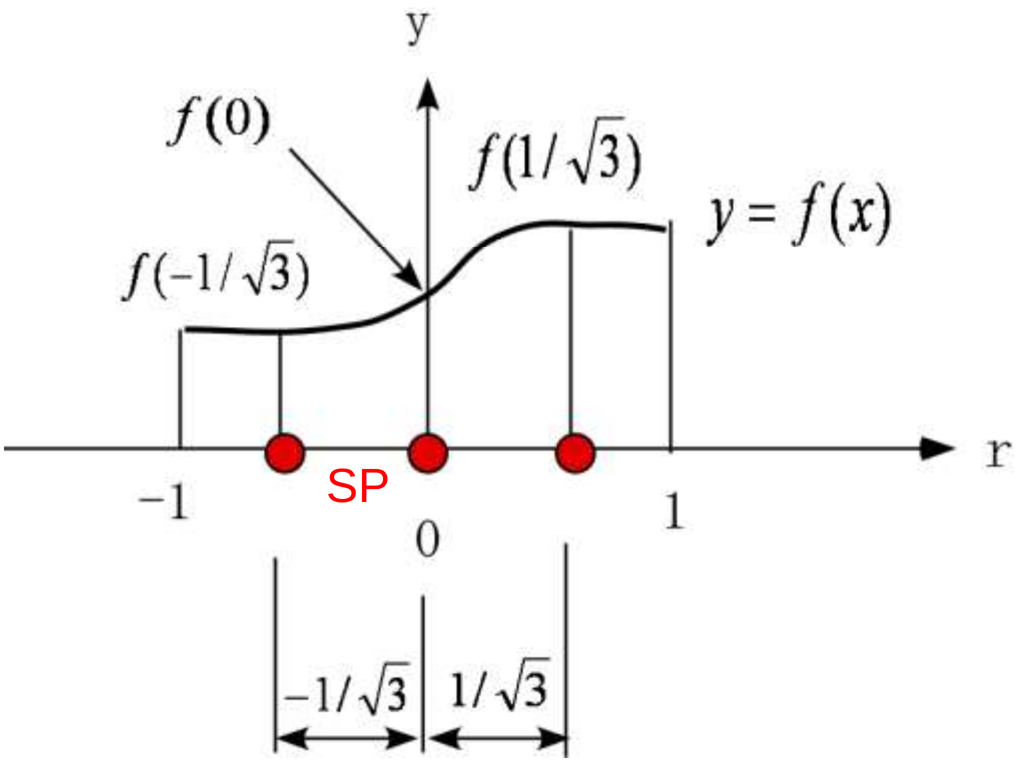
ニュートン・コーツ法での重みと誤差評価

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} C_i^n f(x_i) + R_n$$

TABLE 5.1 *Newton–Cotes numbers and error estimates.*

Number of Intervals n	C_0^n	C_1^n	C_2^n	C_3^n	C_4^n	C_5^n	C_6^n	Upper Bound on Error R_n as a Function of the Derivative of F
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$10^{-1}(b-a)^3F^{\mathrm{II}}(r)$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$					$10^{-3}(b-a)^5F^{\mathrm{IV}}(r)$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				$10^{-3}(b-a)^5F^{\mathrm{IV}}(r)$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$			$10^{-6}(b-a)^7F^{\mathrm{VI}}(r)$
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$		$10^{-6}(b-a)^7F^{\mathrm{VI}}(r)$
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$	$10^{-9}(b-a)^9F^{\mathrm{VIII}}(r)$

Gauss公式



n=1

$$\int_{-1}^{1} f(r)dr \approx 2f(0)$$

n=2

$$\int_{-1}^{1} f(r)dr \approx f(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3})$$

Gauss公式におけるサンプリングポイントと重み

TABLE 5.2 Sampling points and weights in Gauss–Legendre numerical integration.

n	r_i			α_i		
1	0. (15 zeros)			2. (15 zeros)		
2	±0.57735	02691	89626	1.00000	00000	00000
3	±0.77459	66692	41483	0.55555	55555	55556
	0.00000	00000	00000	0.88888	88888	88889
4	±0.86113	63115	94053	0.34785	48451	37454
	±0.33998	10435	84856	0.65214	51548	62546
5	±0.90617	98459	38664	0.23692	68850	56189
	±0.53846	93101	05683	0.47862	86704	99366
	0.00000	00000	00000	0.56888	88888	88889
6	±0.93246	95142	03152	0.17132	44923	79170
	±0.66120	93864	66265	0.36076	15730	48139
	±0.23861	91860	83197	0.46791	39345	72691

FEM解析における剛性行列は荷重ベクトルの計算での数値積分

剛性行列：
$$\mathbf{K} = \sum_{a} \mathbf{K}_{(a)}$$

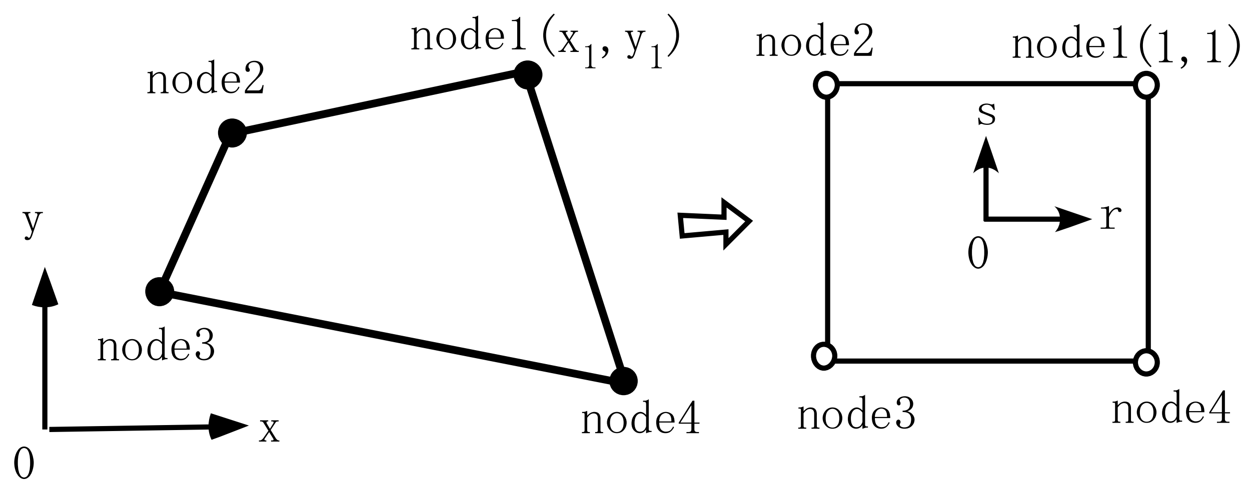
剛性方程式：
$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R}$$

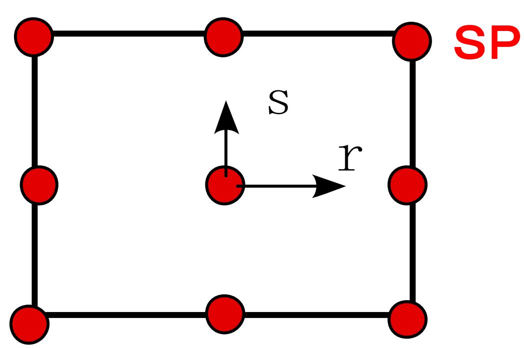
要素剛性行列：
$$\mathbf{K}_{(a)} = \int_{V^{(a)}} \mathbf{B}^{T}\mathbf{C}\mathbf{B} \det \mathbf{J} \cdot dv^{(a)} = t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{F}(r,s)\,drds$$

$$\mathbf{K}_{(a)} = \int_{V^{(a)}} \mathbf{B}^{T}\mathbf{C}\mathbf{B} \det \mathbf{J} \cdot dv^{(a)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{F}(r,s,t)\,drdsdt$$

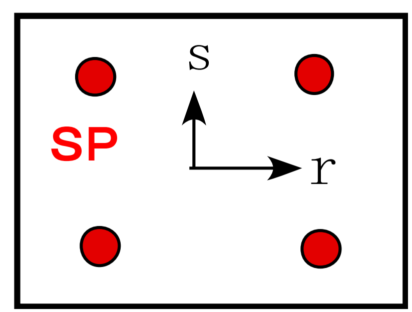
荷重ベクトル：
$$\mathbf{R}_{s} = \sum_{m} \int_{S(m)} \mathbf{H}^{s(m)^{T}} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} = \sum_{b} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{H}^{S(m)^{T}}(r,s)\,\mathbf{f}^{S(m)} \det \mathbf{J}_{S}\, drds$$

2次元問題



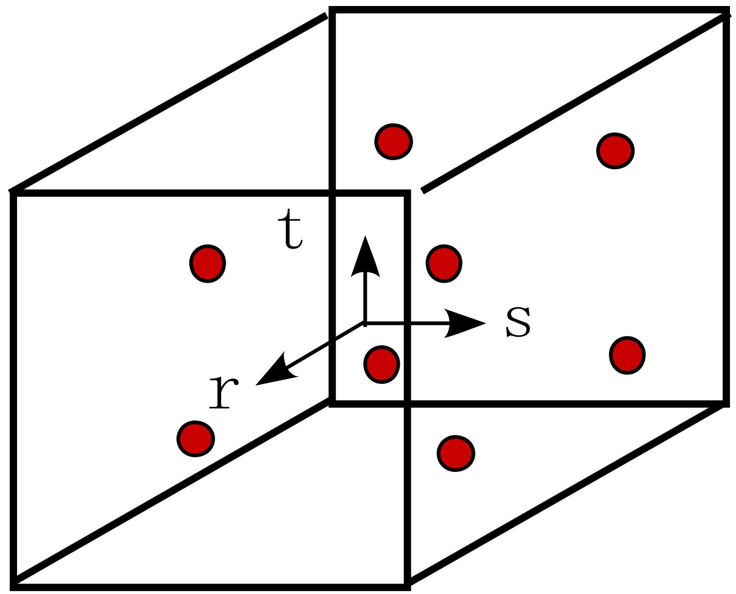


シンプソン公式



Gauss公式

3次元問題：n=2の数値積分でのSPの比較



Simpson 3x3x3

Gauss 2x2x2

（注）Gauss公式を用いることにより演算速度が大幅に改良される。

例：　LS-DYNAでは3次元動的非線形解析に対してGaussの１点積分を採用