

剛性方程式を作るための数値積分法 (Gauss 積分)

1. 任意四辺形要素を用いた場合の剛性方程式

図 1.1 に示すような、任意形状の四辺形要素を用いた場合の要素剛性行列 \mathbf{K}_a を求める手順を取り上げる。

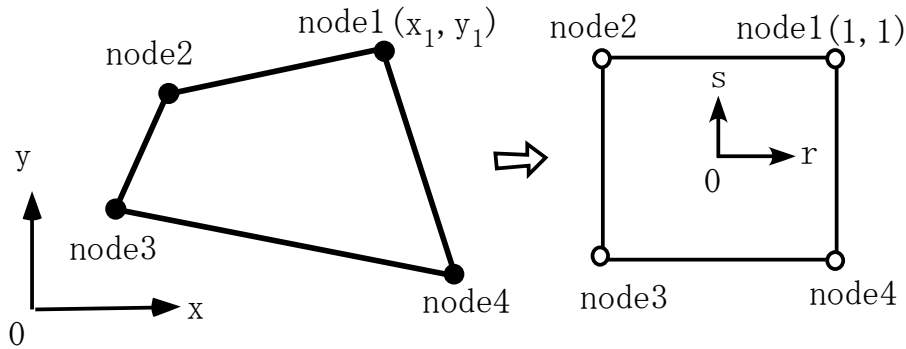


図 1.1 任意四辺形要素

図 1 の任意四辺形要素の自然座標系 (0-r-s) での補間関数は

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s), & h_2 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s), \\ h_3 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s), & h_4 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s). \end{aligned} \quad (1-1)$$

であるので、座標の補間は

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 h_i x_i = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)x_2 \\ &+ \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_4 \end{aligned} \quad (1-2)$$

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^4 h_i y_i = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)y_2 \\ &+ \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_4 \end{aligned} \quad (1-3)$$

ここに、 $x_i, y_i, i=1,2,3,4$ は節点 i の座標値である。

一方、変位 (u, v) の補間は、同様に、

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 h_i u_i = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)u_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)u_2 \\ &+ \frac{1}{4}(1-r)(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)u_4 \end{aligned} \quad (1-4)$$

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^4 h_i v_i = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)v_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)v_2 \\ &+ \frac{1}{4}(1-r)(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)v_4 \end{aligned} \quad (1-5)$$

ここに, $u_i, v_i, i=1,2,3,4$ は節点 i の変位である.

つぎに, 要素内のひずみベクトルは

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (1-6)$$

ここに,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1-7)$$

偏微分係数の座標変換より,

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r \\ \partial x/\partial s & \partial y/\partial s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

ここに,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial y/\partial r \\ \partial x/\partial s & \partial y/\partial s \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

はヤコビアン行列であり, 各要素は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)x_1 - \frac{1}{4}(1+s)x_2 - \frac{1}{4}(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1-s)x_4 \\ \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)x_2 - \frac{1}{4}(1-r)x_3 - \frac{1}{4}(1+r)x_4 \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{1}{4}(1+s)y_1 - \frac{1}{4}(1+s)y_2 - \frac{1}{4}(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1-s)y_4 \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{1}{4}(1+r)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)y_2 - \frac{1}{4}(1-r)y_3 - \frac{1}{4}(1+r)y_4 \end{aligned} \quad (1-10)$$

式(1-8)の逆関係は

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \partial/\partial r \\ \partial/\partial s \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

つぎに, 要素 a の節点変位ベクトルを $\hat{\mathbf{u}}$ とすれば, 式(1-6)のひずみベクトルは, 式(1-7), 式(1-10) および式(1-11)を考慮し, 以下のように与えられる.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (1-12)$$

ここに, \mathbf{B} はひずみ行列と呼ばれており, 以下のように与えられる.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+s & 0 & -1-s & 0 & -1+s & 0 & 1-s & 0 \\ 0 & 1+r & 0 & 1-r & 0 & -1+r & 0 & -1-r \\ 1+r & 1+s & 1-r & -1-s & -1+r & -1+s & -1-r & 1-s \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

したがって, 全体剛性行列 \mathbf{K} は要素剛性行列 $\mathbf{K}_{(a)}$ の集合として以下のように与えられる.

$$\mathbf{K} = \sum_a \mathbf{K}_{(a)} \quad (1-14)$$

剛性方程式は,

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R} \quad (1-15)$$

ここに, \mathbf{u} は全節点変位ベクトル, \mathbf{R} は荷重ベクトルであり, 要素剛性行列 $\mathbf{K}_{(a)}$ は,

$$\mathbf{K}_{(a)} = \int_{v^{(a)}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \cdot dv^{(a)} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(r, s) dr ds \quad (1-16)$$

ここに, 被積分関数: $\mathbf{F}(r, s) = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J}$ であり, t は 2 次元構造体の厚みである.

ところで, 辺長が $\lambda_x \times \lambda_y$ の長方形断面の場合は, 局所座標系 ($0-x-y$) の原点を要素中心に採れば,

$$x_1 = x_4 = \lambda_x / 2, \quad x_2 = x_3 = -\lambda_x / 2, \quad x = \lambda_x r / 2$$

$$y_1 = y_2 = \lambda_y / 2, \quad y_3 = y_4 = -\lambda_y / 2, \quad y = \lambda_y s / 2$$

となり、ヤコビアン行列は

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_x / 2 & 0 \\ 0 & \lambda_y / 2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{J} = \frac{\lambda_x \lambda_y}{4}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \lambda_y / 2 & 0 \\ 0 & \lambda_x / 2 \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

となり、各要素が一定となるために、式(1-16)での積分は解析的に実行できる。

しかしながら、対称性の無い任意形状の四辺形要素では、ヤコビアン行列 \mathbf{J} の要素が r, s の関数で表され、その結果、式(1-16)の積分を解析的に行うことが難しく、数値積分に頼らなくてはならない。

2. 数値積分法

ここでは、式(1-16)の積分を数値的に行う方法を考える。

$$\mathbf{K}_{(a)} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(r, s) dr ds \quad (1-18)$$

一般的には、1次元関数 $\mathbf{F}(r)$ 、2次元関数 $\mathbf{F}(r, s)$ 、および3次元関数 $\mathbf{F}(r, s, t)$ の数値積分は以下のように表される。

$$\int \mathbf{F}(r) dr = \sum_i \alpha_i \mathbf{F}(r_i) + \mathbf{R}_n \quad (1-19)$$

$$\iint \mathbf{F}(r, s) dr ds = \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j \mathbf{F}(r_i, s_j) + \mathbf{R}_n \quad (1-20)$$

$$\iiint \mathbf{F}(r, s, t) dr ds dt = \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j \sum_k \alpha_k \mathbf{F}(r_i, s_j, t_k) + \mathbf{R}_n \quad (1-21)$$

ここに、 \mathbf{R}_n は誤差のオーダー、 $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ は重み係数である。

以下に、各種の数値積分公式を示す。

(a) ニュートン・コーツ式(Newton-Cotes Formulas)

ニュートン・コーツ式は積分区間(a-b)を等間隔に分割した積分法であり、以下のように与えら得る。

$$\int_a^b \mathbf{F}(r) dr = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^n \mathbf{F}(r_i) + \mathbf{R}_n \quad (1-22)$$

ここに、 n は分割区間数、 C_i^n は重み係数で、各 n に対して Table 5-1 のように与えられている。この内、 $n=1$ は台形公式と呼ばれるものであり、式(1-22)に適用すると以下ようになる。

$$\int_a^b \mathbf{F}(r) dr = \frac{b-a}{2} [\mathbf{F}(a) + \mathbf{F}(b)] \quad (1-23)$$

また、 $n=2$ はシンプソン公式と呼ばれるもので、式(1-22)に適用すると以下ようになる。

$$\int_a^b \mathbf{F}(r) dr = \frac{b-a}{6} [\mathbf{F}(a) + 4\mathbf{F}(\frac{a+b}{2}) + \mathbf{F}(b)] \quad (1-24)$$

シンプソン公式での誤差の上限は $10^{-3} (b-a)^5 d^4 \mathbf{F}(r) / dr^4$ のオーダーである。

また、図 2.1 に示すような2次元積分にシンプソン公式を適用すると、以下ようになる。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(r, s) dr ds = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \{ \mathbf{F}(1,1) + 4\mathbf{F}(1,0) + \mathbf{F}(1,-1) + 4\mathbf{F}(0,1) + 16\mathbf{F}(0,0) + 4\mathbf{F}(0,-1) + \mathbf{F}(-1,1) + 4\mathbf{F}(-1,0) + \mathbf{F}(-1,-1) \} \quad (1-25)$$

TABLE 5.1 Newton-Cotes numbers and error estimates.

Number of Intervals n	C_0^n	C_1^n	C_2^n	C_3^n	C_4^n	C_5^n	C_6^n	Upper Bound on Error R_n as a Function of the Derivative of F
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$10^{-1}(b-a)^3 F''(r)$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$					$10^{-3}(b-a)^5 F^{IV}(r)$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				$10^{-3}(b-a)^5 F^{IV}(r)$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$			$10^{-6}(b-a)^7 F^{VI}(r)$
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$		$10^{-6}(b-a)^7 F^{VI}(r)$
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$	$10^{-9}(b-a)^9 F^{VIII}(r)$

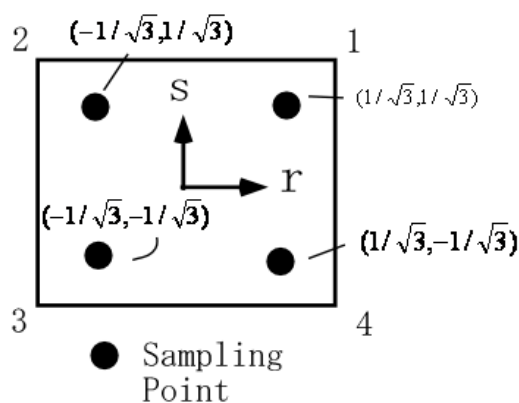
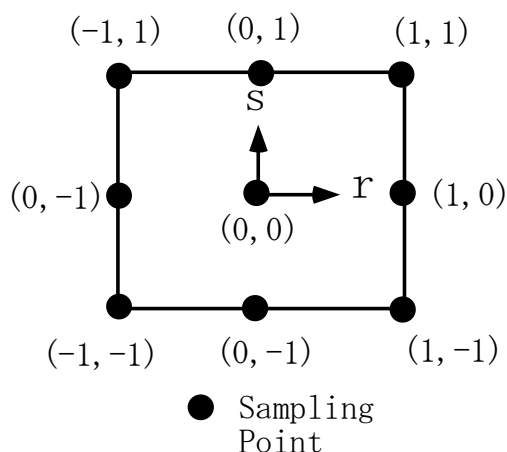


図 2.1 2次元のニュートンコーツ式 (n=2)

図 2.2 ガウス式(n=2)

(b) ガウス式 (Gauss-Formulas)

ガウス式とは、Gauss-Legendre 数値積分法として知られ、以下の式

$$\int_a^b \mathbf{F}(r) dr = \alpha_1 \mathbf{F}(r_1) + \alpha_2 \mathbf{F}(r_2) + \alpha_3 \mathbf{F}(r_3) + \dots + \alpha_n \mathbf{F}(r_n) + \mathbf{R}_n \quad (1-26)$$

において、重み α_i , $i=1,2,3,\dots,n$ とサンプリングポイント r_i , $i=1,2,3,\dots,n$ を最適化し、一定の誤差 \mathbf{R}_n の下でサンプリングポイントの数を最小化した方法である。その結果、ニュートンコーツ式のようにサンプリングポイントは等間隔ではなく、不等間隔に選ぶことによって、分割数 n の下で、Table 5.2 に示すような、サンプリングポイント r_i と重み α_i となる。

$n=2$ の場合のニュートンコーツ式とガウス式でのサンプリングポイント数 (s_n) を比較すれば、1次元積分では、ニュートンコーツ式では $s_n = 3$ 、ガウス式では $s_n = 2$ となり、

TABLE 5.2 Sampling points and weights in Gauss-Legendre numerical integration.

n	r_i			α_i		
1	0. (15 zeros)			2. (15 zeros)		
2	± 0.57735	02691	89626	1.00000	00000	00000
3	± 0.77459	66692	41483	0.55555	55555	55556
	0.00000	00000	00000	0.88888	88888	88889
4	± 0.86113	63115	94053	0.34785	48451	37454
	± 0.33998	10435	84856	0.65214	51548	62546
5	± 0.90617	98459	38664	0.23692	68850	56189
	± 0.53846	93101	05683	0.47862	86704	99366
	0.00000	00000	00000	0.56888	88888	88889
6	± 0.93246	95142	03152	0.17132	44923	79170
	± 0.66120	93864	66265	0.36076	15730	48139
	± 0.23861	91860	83197	0.46791	39345	72691

2次元積分では、ニュートンコートツ式では $s_n = 9$ 、ガウス式では $s_n = 4$ となり、

3次元積分では、ニュートンコートツ式では $s_n = 27$ 、ガウス式では $s_n = 8$ となる。

たとえば、式(1-25)の2次元積分でのニュートンコートツ式($n=2$)をガウス式($n=2$)に変えれば、

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(r,s) dr ds = 1 \times 1 \times \left\{ \mathbf{F}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) + \mathbf{F}(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) + \mathbf{F}(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) + \mathbf{F}(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) \right\} \quad (1-27)$$

したがって、同じ精度を有する数値積分式としては、ニュートンコートツ式よりガウス式の方がサンプリングポイント数が少なくなり、演算時間が短縮できることが分かり、一般的なアイソパラメトリック FEM ではガウス式が用いられることが多い。

さらに、被積分関数 $\mathbf{F}(r,s)$ が r,s の 2 次以下の関数であれば、 $n=2$ のガウス式での誤差はゼロであり、正しい積分値が得られるが、高次要素を用いた場合には、 $\mathbf{F}(r,s)$ が r,s の高次関数を含む場合があり、その場合の推奨できるガウス式でのオーダーが 2 次元問題の場合について、Table 5.5 に示されている。すなわち、高次要素になればなるほど、積分のオーダーも上がることに留意されたい。

しかしながら、ガウス式は少ないサンプリングポイントで優れた精度の数値積分が実行できることに大きな特徴があるが、サンプリングポイントが要素の端部に無いので、弾塑性解析のように要素内の塑性域の拡がりの影響を精度良く取り入れたい場合には、要素の端部にサンプリングポイントを持つニュートンコートツ式に比べて必ずしも有利とは言えないので留意する必要がある。

Table 5.5 要素の種類と必要な数値積分法のオーダー


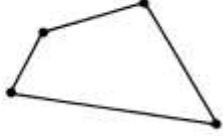


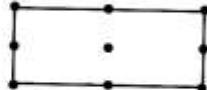
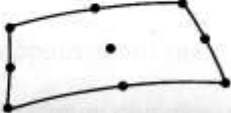
Element	Reliable integration order	Reduced integration used in practice (with spurious zero energy mode(s))
4-node 	2 × 2	—
4-node distorted 	2 × 2	—
8-node 	3 × 3	2 × 2
8-node distorted 	3 × 3	2 × 2
9-node 	3 × 3	2 × 2
9-node distorted 	3 × 3	2 × 2

TABLE 5.5 Gauss numerical integration orders in evaluation of stiffness matrices of two-dimensional rectangular elements (use of Table 5.2).

以上