

コンクリートに対する非線形弾性モデルによる定式化

1. 非線形弾性モデルとは？（第4回の復習）

図 5.1 に示すように、応力・ひずみ関係が曲線で与えられ、負荷と除荷が同じ径路を辿る材料を非線形弾性モデルという。コンクリートのような材料では、圧縮域においては、図 5.1 に示すような単調増加曲線で与えられ、除荷径路は負荷径路とは異なり、除荷時には残留ひずみが発生するが、その影響が大きく現れない問題の解析においては、非線形弾性モデルで十分と思われる。また、引張域ではひび割れ発生前ではほぼ線形弾性モデルにしたがいがい、ひび割れ発生後は後述の引張軟化モデルにしたがうとした解析がしばしば行われている。

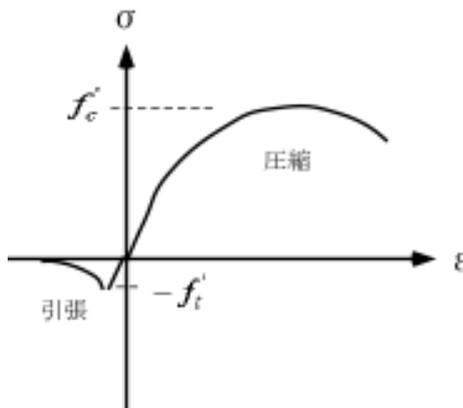


図 5.1 コンクリートの応力・ひずみ曲線

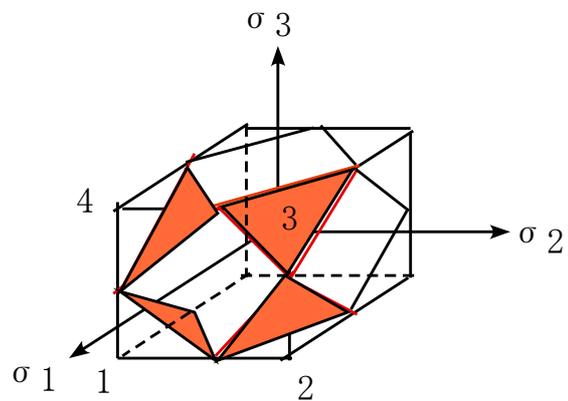


図 5.1' 八面体

等方性の線形弾性モデルでのひずみテンソル ε_{ij} と応力テンソルの関係は以下のように与えられる。

$$s_{ij} = \frac{e_{ij}}{2G}, \quad \sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + K\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + (3K - 2G)\frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} \quad (5.2)$$

ここに、 s_{ij} は偏差応力テンソルで、 $s_{ij} = \sigma_{ij} - (\sigma_{kk}/3)\delta_{ij}$ 、 e_{ij} は偏差ひずみテンソルで、 $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (\varepsilon_{kk}/3)\delta_{ij}$ で、 δ_{ij} は単位テンソル（クロネッカーデルタ）であり、 $G = E/(2 + \nu)$ はせん断弾性係数、 $K = E/[3(1 - 2\nu)]$ は体積弾性係数、 ν : ポアソン比、である。

式(5.2)に、八面体直ひずみ： $\varepsilon_{oct} = \varepsilon_{kk}/3$ 、八面体直応力： $\sigma_{oct} = \sigma_{kk}/3$ 、ならびに八面体せん断応力： $\tau_{oct} = (\frac{2}{3}J_2)^{1/2}$ および八面体せん断ひずみ： $\gamma_{oct} = (\frac{8}{3}J_2^e)^{1/2}$ 、ここに、 $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$ 、

$J_2^e = \frac{1}{2}e_{ij}e_{ij}$ を導入すると、式(5.2)の非線形弾性モデルへの最も簡単な拡張は、せん断弾性係数 G を γ_{oct} に応じて変化する $G_s(\gamma_{oct})$ に置き換え、体積弾性係数 K を ε_{oct} に応じて変化する $K_s(\varepsilon_{oct})$ に置き換えた以下のような応力・ひずみ関係が考えられる。

$$\sigma_{oct} = 3K_s(\varepsilon_{oct}) \cdot \varepsilon_{oct} \quad (5.3)$$

$$\tau_{oct} = G_s(\gamma_{oct}) \cdot \gamma_{oct} \quad (5.4)$$

$$\sigma_{ij} = 2G_s(\gamma_{oct}) \cdot \varepsilon_{ij} + [3K_s(\varepsilon_{oct}) - 2G_s(\gamma_{oct})] \cdot \varepsilon_{oct} \delta_{ij} \quad (5.5)$$

ここに、 $K_s(\varepsilon_{oct})$ と $G_s(\gamma_{oct})$ は非線形弾性体でのそれぞれ割線体積弾性係数と割線せん断弾性係数を意味する。すなわち、

$$3K_s(\varepsilon_{oct}) = \frac{\sigma_{oct}}{\varepsilon_{oct}}, \quad G_s(\gamma_{oct}) = \frac{\tau_{oct}}{\gamma_{oct}} \quad (5.6)$$

となる。

なお、八面体とは、図 5.1' に示すような、主応力軸 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) に等しい角度を有する方向の面を持つ立方体を意味しており、主応力方向に 6 面を有する正立方体の頂点 (1,2,3,...,8) から 8 面を切り取った八面のうち、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の 3 軸がともに正 (または負) 方向 (静水圧軸とも呼ばれる) に向かう面の直応力 (σ_{oct}) とせん断応力 (τ_{oct}) と呼んでおり、前者は応力テンソルの 1 次不変量 (I_1) に、後者は偏差応力テンソルの 2 次不変量の平方根 ($\sqrt{J_2}$) の $\sqrt{2}$ 倍に相当している。

2. 非線形弾性モデルでの FEM 解析法

前節ですでに述べたことであるが、FEM 解析の基礎式は、要素(a)に関して、

$${}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)} = {}^t \mathbf{B}^{(a)} {}^t \mathbf{U} \quad (5.7)$$

ここに、 ${}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)}$: 荷重レベル t (以下、t 時刻と呼ぶ) のひずみベクトル、 ${}^t \mathbf{B}^{(a)}$: ひずみ行列、 ${}^t \mathbf{U}$: 節点変位ベクトルであり、応力とひずみ関係は

$${}^t \boldsymbol{\sigma}^{(a)} = {}^t \mathbf{C}_s \cdot {}^t \boldsymbol{\varepsilon}^{(a)} \quad (5.8)$$

ここに、 ${}^t \boldsymbol{\sigma}^{(a)}$: t 時刻の応力、 ${}^t \mathbf{C}_s$: t 時刻の割線弾性係数行列である。ポテンシャルエネルギー極小の原理 (仮想仕事の原理でもある) より、t 時刻での表面力や物体力のような荷重ベクトルを ${}^t \mathbf{R}$ とすれば、内力 ${}^t \mathbf{F}$ と外力 ${}^t \mathbf{R}$ のつりあい条件は

$${}^t \mathbf{R} = {}^t \mathbf{F}, \quad (5.9)$$

ここに、

$${}^t \mathbf{R} = {}^t \mathbf{K} {}^t \mathbf{U}, \quad (5.10)$$

$${}^t \mathbf{F} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} {}^t \mathbf{B}^{(a)T} {}^t \mathbf{C}_s {}^t \mathbf{B}^{(a)} dV^{(a)} \cdot {}^t \mathbf{U} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} {}^t \mathbf{B}^{(a)T} {}^t \boldsymbol{\sigma} dV^{(a)} \quad (5.11)$$

ここに、 ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ は t 時刻での要素内の応力を示している。

微小変位理論の適用範囲内の材料非線形問題では、 ${}^t \mathbf{B}^{(a)}$ は一定値 ($\mathbf{B}^{(a)}$) であるので、剛性行列は以下のように与えられる。

$${}^t \mathbf{K} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} \mathbf{B}^{(a)T} {}^t \mathbf{C}_s \mathbf{B} dV^{(a)} \quad (5.12)$$

さて、材料非線形問題では、任意の時刻 t での式(5.9)を解く必要がある。一般的な解法は、荷重レベルを ${}^0 \mathbf{R}, {}^1 \mathbf{R}, {}^2 \mathbf{R}, \dots, {}^n \mathbf{R}$ のように分割し、t 時刻での解: ${}^t \mathbf{U}$ と ${}^t \boldsymbol{\sigma}$ を用いて、 $t + \Delta t$ レベルのつりあい条件

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} \mathbf{B}^T {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} dV^{(a)} \quad (5.13)$$

の解: ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ を見出すことになる。

図 5.2 は一般的に良く用いられている修正 Newton 反復法を示している。この方法は t レベルでの剛性行列 ${}^t \mathbf{K}$ を用いて、反復計算の収束値により $t + \Delta t$ レベルの解: ${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}$ を見出す点に特徴がある。この方法での反復計算手順は以下のとおりである。

初期条件 ($i = 0$) として、

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(0)} = {}^t \mathbf{U}; \quad {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(0)} = {}^t \mathbf{F} \quad (5.14)$$

を用い，反復回数(i)での収束計算スキームは

$${}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)}, \quad (5.15)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (5.16)$$

ここに，

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i)} = \sum_{(a)} \int_{V^{(a)}} \mathbf{B}^T {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} dV^{(a)}, \quad (5.17)$$

$${}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} + {}^t \mathbf{C}_s \mathbf{B} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \quad (5.18)$$

であり，ノルム $\|\Delta \mathbf{U}^{(i)}\|$ ， $i=1,2,3,\dots$ が許容誤差以内になるまで反復計算を行う。

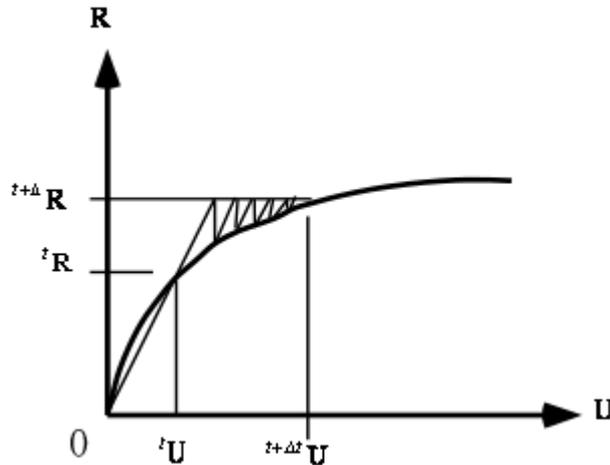


図 5.2 修正 Newton 反復法

3. 圧縮域でのコンクリートに対する非線形弾性モデルの適用

一般に，非線形弾性体の応力・ひずみ関係が以下のように与えられるものとすれば，

$$\sigma_{oct} = 3K_0 \varepsilon_{oct} (1 + a \varepsilon_{oct} + b \varepsilon_{oct}^2 + c \varepsilon_{oct}^3 + \dots) \quad (5.19)$$

$$\tau_{oct} = G_0 \gamma_{oct} (1 + a' \gamma_{oct} + b' \gamma_{oct}^2 + c' \gamma_{oct}^3 + \dots) \quad (5.20)$$

$$3K_0 = E_0 / (1 - 2\nu_0), \quad G_0 = 0.5 E_0 / (1 + \nu_0)$$

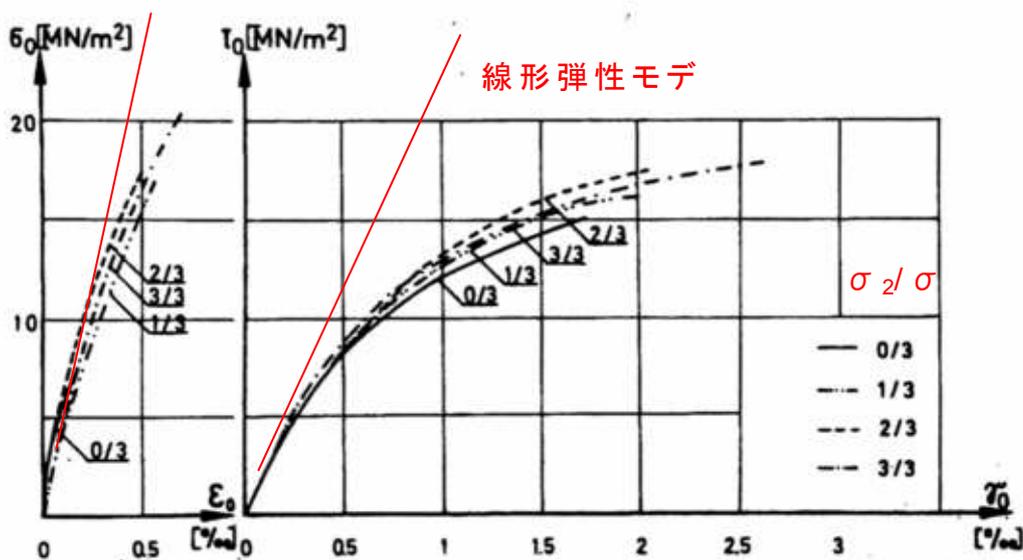


図 5.3 2 軸圧縮応力状態でのコンクリートの応力・ひずみ曲線

ここに、 E_0, G_0, ν_0 それぞれ初期弾性係数、初期せん断弾性係数および初期ポアソン比である。

たとえば、実験での2軸圧縮応力場でのコンクリートの応力・ひずみ関係は図5.3のように与えられる。図は、 $\sigma_0 = \sigma_{oct}, \varepsilon_0 = \varepsilon_{oct}, \tau_0 = \tau_{oct}, \gamma_0 = \gamma_{oct}$ であり、主応力比： $\sigma_2 / \sigma_1 = 0, 1/3, 2/3, 1.0$ の下での実験曲線を表している。 σ_2 / σ_1 の値によって曲線は若干異なるが、ほぼ一つの曲線で近似できるように思われる。

たとえば、図5.4に示すような、コンクリートの1軸応力・ひずみ曲線を以下の3次曲線で表すと、

$$\sigma = E_{c0}\varepsilon(1 + \bar{a}\varepsilon + \bar{b}\varepsilon^2) \quad (5.21)$$

ここに、 $E_{c0} = f'_c / \varepsilon_{c0}$ で、応力とひずみの符号は圧縮が正である。式(5.21)での係数は E_{c0}, \bar{a}, \bar{b} であり、 $E_{c0} = f'_c / \varepsilon_{c0}$ とおき、ピーク応力 (f'_c) でのひずみを ε_{cm} 、終局ひずみを ε_{cu} とすれば、係数 \bar{a}, \bar{b} は以下のように表せる。

$$\bar{a} = -\frac{1}{2\varepsilon_{cm}} \left[1 + 3 \left(1 - \frac{2f'_c}{E_{c0}} \times \frac{1}{\varepsilon_{cu}} \right) \right], \quad (5.22)$$

$$\bar{b} = \left(\varepsilon_{cm} - \frac{2f'_c}{E_{c0}} \right) / \varepsilon_{cm}^3 \quad (5.23)$$

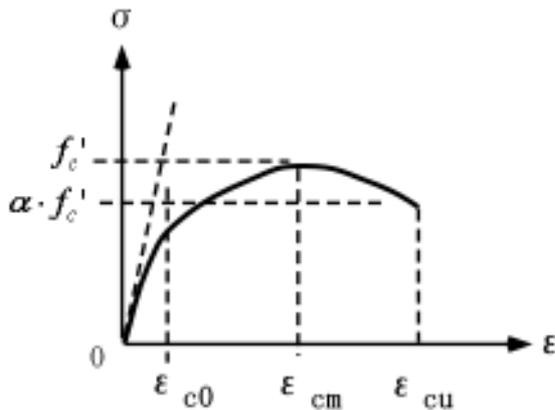


図 5.4 コンクリートの1軸応力・ひずみ曲線

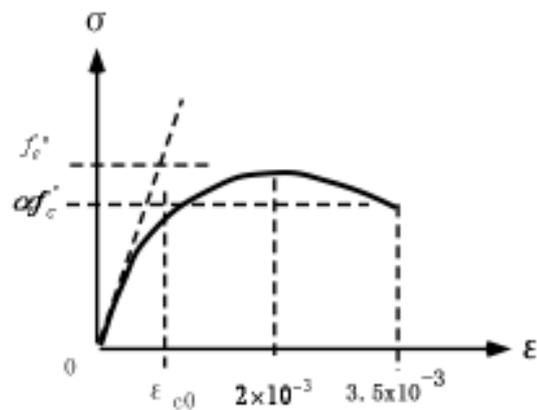


図 5.5 式(5.24)による曲線

たとえば、コンクリート標準示方書では、設計に用いる応力・ひずみ曲線を以下のように与えている。

$$f'_{ck} = k_1 f'_c, \quad k_1 = 1 - 0.003 f'_c$$

$$\varepsilon'_{cu} = \frac{155 - f'_{ck}}{30000}, \quad 0.0025 \leq \varepsilon'_{cu} \leq 0.0035$$

$$\sigma'_c = k_1 f'_{cd} \times \frac{\varepsilon'_c}{0.002} \times \left(2 - \frac{\varepsilon'_c}{0.002} \right), \quad \text{ただし}, 0 \leq \varepsilon'_c \leq 2 \times 10^{-3}$$

$$\sigma'_c = f'_{cd}, \quad \text{ただし}, 2 \times 10^{-3} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon'_{cu} \quad (5.24)$$

ちなみに、 $f'_c = 30 \text{ N/mm}^2, k_1 = 0.85, f'_{cd} = f'_{ck} = 0.85 \times f'_c = 25.5 \text{ N/mm}^2, \varepsilon'_{cu} = 0.35 \times 10^{-3}$ としたときの、コンクリート標準示方書の応力・ひずみ曲線と、式(5.21)-(5.23)での3次曲線による応力・ひずみ曲線（ただし、 $f'_c = 30 \text{ N/mm}^2, E_{c0} = 2.4 \times 10^4 \text{ N/mm}^2, \varepsilon_{cm} = 2.5 \times 10^{-3}, \varepsilon_{cu} = 3.5 \times 10^{-3}$ ）との比較を図5.6に示す。図5.6より、式(5.21)による3次曲線はコンクリート標準示方書の式に十分に対応していることが分かる。

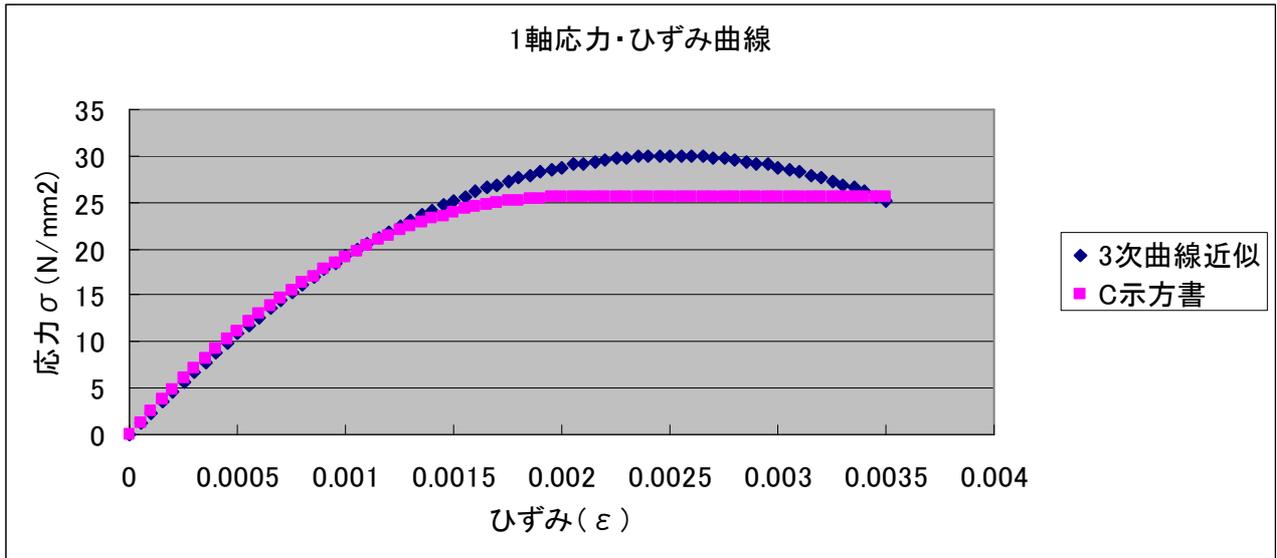


図 5.6 コンクリート標準示方書の式と 3 次曲線による式との比較 ($f'_c = 30\text{N/mm}^2$)

つぎに、式(5.21)に示した x 方向の 1 軸応力・ひずみ曲線から式(5.19)および式(5.20)の多軸応力・ひずみ曲線への変換は、以下のように行うことができる。

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_x}{3}, \quad \tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_x \quad (5.25)$$

$$\varepsilon_{oct} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}, \quad \gamma_{oct} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} \quad (5.26)$$

$\varepsilon_y = -\nu_s \varepsilon_x$, $\varepsilon_z = -\nu_s \varepsilon_x$, ここに、 ν_s はポアソン比, とおけば,

$$\varepsilon_{oct} = \frac{(1-2\nu_s)\varepsilon_x}{3}, \quad \gamma_{oct} = \frac{2\sqrt{2}(1+\nu_s)}{3} \cdot \varepsilon_x \quad (5.27)$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} \sigma_{oct} &= \frac{\sigma_x}{3} = \frac{E_{c0}}{3} \cdot \varepsilon_x (1 + \bar{a} \varepsilon_x + \bar{b} \varepsilon_x^2) \\ &= \frac{E_{c0}}{1-2\nu_s} \cdot \varepsilon_{oct} \left[1 + \bar{a} \frac{3}{1-2\nu_s} \cdot \varepsilon_{oct} + \bar{b} \left(\frac{3}{1-2\nu_s} \right)^2 \varepsilon_{oct}^2 \right] \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_x = \frac{E_{c0}}{2(1+\nu_s)} \cdot \gamma_{oct} \left[1 + \bar{a} \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu_s)} \cdot \gamma_{oct} + \bar{b} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu_s)} \right)^2 \cdot \gamma_{oct}^2 \right] \quad (5.29)$$

よって、式(5.3)および(5.4)による割線弾性係数は

$$3K_s(\varepsilon_{oct}) = \frac{E_{c0}}{1-2\nu_s} \cdot \left[1 + \bar{a} \frac{3}{1-2\nu_s} \cdot \varepsilon_{oct} + \bar{b} \left(\frac{3}{1-2\nu_s} \right)^2 \varepsilon_{oct}^2 \right] \quad (5.30)$$

$$G_s(\gamma_{oct}) = \frac{E_{c0}}{2(1+\nu_s)} \left[1 + \bar{a} \frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu_s)} \cdot \gamma_{oct} + \bar{b} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}(1+\nu_s)} \right)^2 \cdot \gamma_{oct}^2 \right] \quad (5.31)$$

と表せ、式(5.2)に基づく応力テンソルとひずみテンソルの関係は以下のように表せる。

$$\sigma_{ij} = 2G_s(\gamma_{oct}) \varepsilon_{ij} + [3K_s(\varepsilon_{oct}) - 2G_s(\gamma_{oct})] \cdot \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} \quad (5.32)$$

上式を行列表示すると、3次元応力場では以下のようなになる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_s & -\tilde{E}'_s & -\tilde{E}'_s & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{E}'_s & \tilde{E}_s & -\tilde{E}'_s & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{E}'_s & -\tilde{E}'_s & \tilde{E}_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

ここに、

$$\tilde{E}_s = K_s(\varepsilon_{oct}) + 4G_s(\gamma_{oct})/3, \quad \tilde{E}'_s = K_s(\varepsilon_{oct}) - 2G_s(\gamma_{oct})/3, \quad \tilde{G}_s = G_s(\gamma_{oct}), \quad \text{である.}$$

さらに、 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T$ と置き、式(5.33)を以下のように表示すれば、

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.34)$$

ここに、

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \tilde{E}_s & -\tilde{E}'_s & -\tilde{E}'_s & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{E}'_s & \tilde{E}_s & -\tilde{E}'_s & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{E}'_s & -\tilde{E}'_s & \tilde{E}_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{G}_s \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

平面ひずみ問題 ($\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) での割線弾性係数行列は

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \tilde{E}_s & -\tilde{E}'_s & 0 \\ -\tilde{E}'_s & \tilde{E}_s & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{G}_s \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

平面応力問題 ($\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$) での割線弾性係数行列は

$$\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} \tilde{E}_s - \tilde{E}'_s{}^2 / \tilde{E}_s & -(\tilde{E}'_s + \tilde{E}'_s{}^2 / \tilde{E}_s) & 0 \\ -(\tilde{E}'_s + \tilde{E}'_s{}^2 / \tilde{E}_s) & \tilde{E}_s - \tilde{E}'_s{}^2 / \tilde{E}_s & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{G}_s \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

と表される。

最後に、図 5.6 の 3 次曲線による 1 軸応力・ひずみ曲線に対応する σ_x と ε_x , ε_{oct} および γ_{oct} の関係を示したものが図 5.7 であり、体積弾性係数 $3K_s(\varepsilon_{oct})$ および $G_s(\gamma_{oct})$ の変化を示したものが図 5.8 である。図 5.7 より、1 軸圧縮状態では、 ε_x と γ_{oct} はほぼ同等の曲線を描いてり、 $\varepsilon_{oct} = \varepsilon_v / 3$, ε_v は体積ひずみ、一様な収縮を示している。一方、図 5.8 より、1 軸圧縮状態での $3K_s(\varepsilon_{oct})$ と $G_s(\gamma_{oct})$ は初期状態より一様に減少していることがわかる。

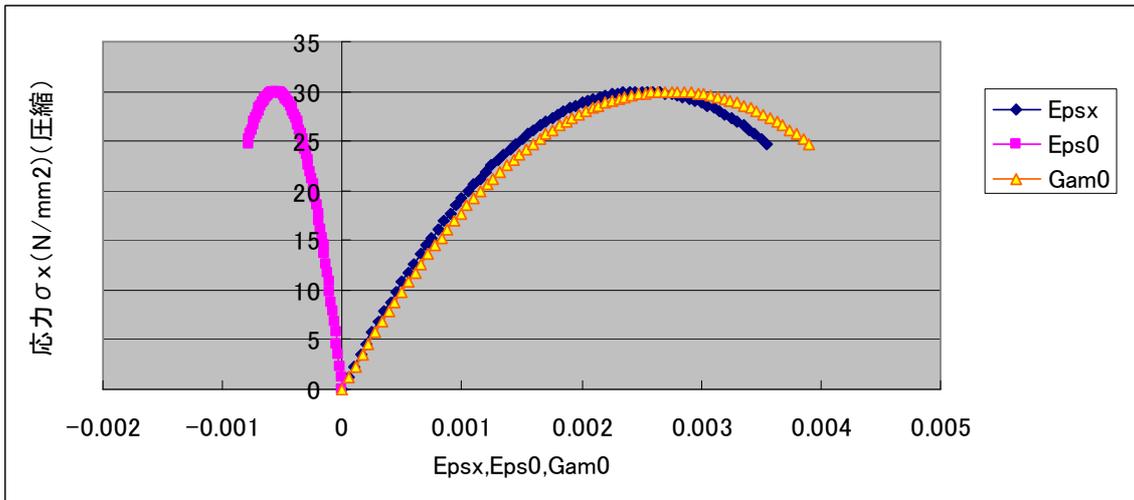


図 5.7 σ_x (圧縮) と ε_x (圧縮), ε_{oct} (収縮) および γ_{oct} の関係

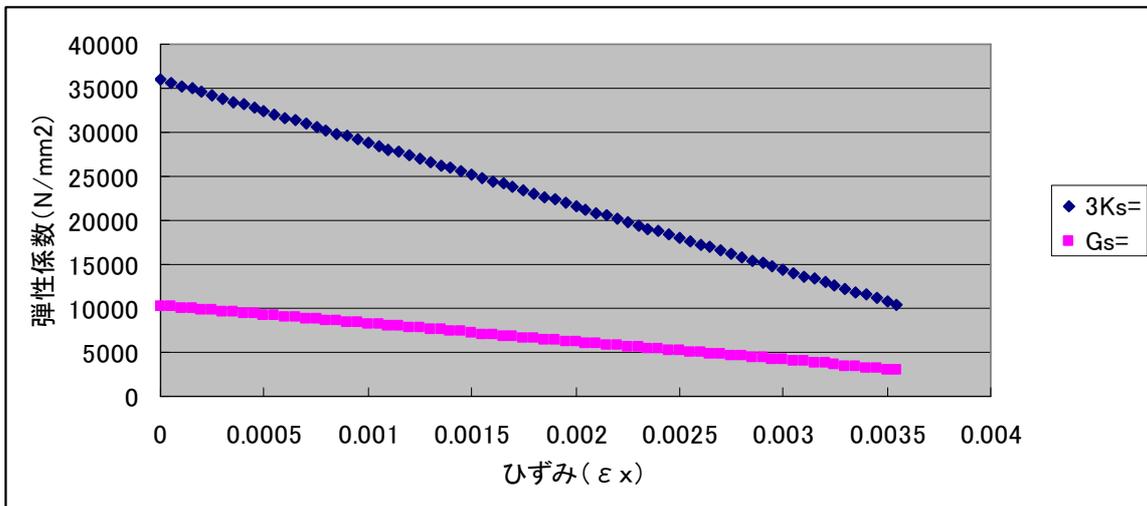


図 5.8 σ_x (圧縮) と $3Ks(\varepsilon_{oct})$ および $G_s(\gamma_{oct})$ の関係

参考：図 5.6–5.8 の作成のための、エクセル・マクロ・VBA によるプログラミング

```
DefDbl A-H
DefDbl O-Z
DefLng M-N
DefInt I-L
```

```
Private Sub CommandButton1_Click()
```

```
Dim SigmT(1000), EpsT(1000), Poison(1000)
```

```
Epsc = 0.0025: Fc = 30#
```

```
Ec0 = 2# * Fc / Epsc
```

```
A = -0.5 * (1 / Epsc) * (1# + 3# * (1# - (2# * Fc / Ec0) * (1# / Epsc)))
```

```
B = (Epsc - 2# * Fc / Ec0) / (Epsc ^ 3)
```

```
Sheet1.Cells(1, 1) = "Fc(kgf/cm2)=": Sheet1.Cells(1, 2) = Fc: Sheet1.Cells(1, 3) =
"Ec0(kgf/cm2)=": Sheet1.Cells(1, 4) = Ec0
Sheet1.Cells(1, 5) = "A,B=": Sheet1.Cells(1, 6) = A: Sheet1.Cells(1, 7) = B
```

```
Rniu = 1# / 6#
```

```
Eps = 0#
```

```
For i = 0 To 1000
```

```
Eps = 0.00005 * i
```

```
Sigm = Ec0 * Eps * (1# + A * Eps + B * Eps ^ 2)
```

```
Sheet1.Cells(i + 4, 5) = Eps
```

```
Sheet1.Cells(i + 4, 6) = Sigm
```

```
'コンクリート示方書”
```

```
Sigmc = 0.85 * Fc * (Eps / 0.002) * (2# - Eps / 0.002)
```

```
If Eps > 0.002 Then
```

```
Sigmc = 0.85 * Fc
```

```
Else
```

```
End If
```

```
Sheet1.Cells(i + 4, 7) = Sigmc
```

```
'多軸応力問題
```

```
EpsY = -Rniu * Eps: Epsz = -Rniu * Eps
```

```
W = (Eps - EpsY) ^ 2 + (EpsY - Epsz) ^ 2 + (Eps - Epsz) ^ 2
```

```
Eps0 = (Eps + EpsY + Epsz) / 3#: Gam0 = 2# * Sqr(W) / 3#
```

```
WW = 3# / (1# - 2# * Rniu): WWW = 3# / (2# * 1.41421 * (1 + Rniu))
```

```
GKs3 = (Ec0 / (1# - 2# * Rniu)) * (1# + A * WW * Eps0 + B * (WW * Eps0) ^ 2)
```

```
GGs = (0.5 * Ec0 / (1# + Rniu)) * (1# + A * WWW * Gam0 + B * (WWW * Gam0) ^ 2)
```

```
Sheet1.Cells(i + 4, 1) = Eps
```

```
Sheet1.Cells(i + 4, 2) = GKs3
```

```
Sheet1.Cells(i + 4, 3) = GGs
```

```
Sheet2.Cells(i + 4, 2) = Sigm
```

```
Sheet2.Cells(i + 4, 3) = Eps
```

```
Sheet2.Cells(i + 4, 4) = -Eps0
```

```
Sheet2.Cells(i + 4, 5) = Gam0
```

```
If Eps > 0.0035 Then Stop
```

```
Next
```

```
Stop
```

```
End Sub
```

4. 圧縮域でのコンクリートの応力-ひずみ曲線のいくつかの提案

前述の式(5.32)で示したように、圧縮状態でのコンクリートを等方非線形弾性体と見なした場合の応力・ひずみ曲線は2つの弾性係数、すなわち $3K_s(\sigma_{oct})$, $G_s(\gamma_{oct})$, により規定できる。たとえば、前述の図5.6-5.8では、1軸圧縮応力・ひずみ曲線の3次曲線近似とポアソン比を1/6に固定したときの結果を示した。コンクリート標準示方書では、1軸圧縮応力・ひずみ曲線の規定があるが、ポアソン比の変化についての規定はない。以下に、既往の文献での $\tau_{oct} - \gamma_{oct}$ 曲線および $\sigma_{oct} - \varepsilon_{oct}$ 曲線の提案例を示す。

(1) 2軸圧縮状態のコンクリートの応力・ひずみ曲線

図5.9には2軸圧縮試験で得られた $\tau_{oct} - \gamma_{oct}$ 曲線および $\sigma_{oct} - \varepsilon_{oct}$ 曲線の例を示した。Gerstle(1980)は、 $\tau_{oct} - \gamma_{oct}$ 曲線を以下のようにモデル化している。

$$\tau_{oct} = \tau_{octp} \left[1 - \exp\left(\frac{-G_0}{\tau_{octp}} \cdot \gamma_{oct}\right) \right] \quad (5.38)$$

ここに、 G_0 は初期せん断弾性係数、 τ_{octp} は八面体せん断強度で、2軸応力比、 $\alpha = \sigma_2 / \sigma_1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, の下で以下のように与える。

$$\tau_{octp} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{1 - \alpha + \alpha^2} \cdot \sigma_{1p} \quad (5.39)$$

$$\sigma_{1p} = \frac{1 + 3.65\alpha}{(1 + \alpha)^2} \cdot f_c' \quad (5.40)$$

ここに、 f_c' は1軸圧縮強度である。割線せん断弾性係数、 $G_s = \tau_{oct} / \gamma_{oct}$, について各実験結果を整理したものが図5.9である。図中、 G_0 は初期せん断弾性係数(= $E_0 / (2 + \nu_0)$)を示している。

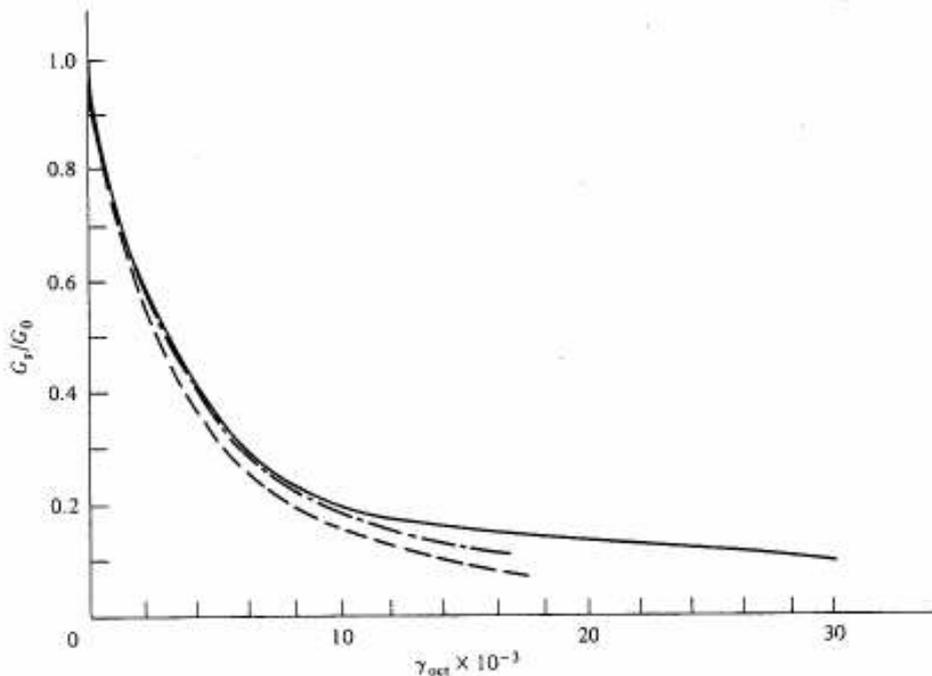


図 2-18 割線せん断係数の変化：実線，Cedolin ほか (1977)；破線，Gerstle (1981, 式 (2.28), $\tau_{octp} = 2.32 \text{ kips/in}^2$)；一点鎖線，Gerstle (1981, 式 (2.28), $\tau_{octp} = 2.55 \text{ kips/in}^2$)。

図 5.9 割線せん断弾性係数の各実験曲線

G_s/G_0 は初期状態から急激に減少しており，ポアソン比 ($\nu_s = 1/6$) と仮定した図 5.8 とは大きく異なっていることが分かる。

一方， $\sigma_{oct} - \varepsilon_{oct}$ の関係に対しては，図 5.10 に示すような実験曲線のモデル化が試みられている．図中の主応力 (σ_1, σ_2) は $\sigma_1 > \sigma_2$ で圧縮を負としており，図 5.3 の $\sigma_1 = -\sigma_2$ ， $\sigma_2 = -\sigma_1$ に相当している．

図 5.10 において， $\sigma_3 = 0$ であるから， $\sigma_{oct} = (\sigma_1 + \sigma_2)/3$ であり，1 軸圧縮強度を f_c' とすれば，2 軸圧縮強度は f_c' ($\sigma_1 = 0$) から $1.3f_c'$ ($\sigma_1 = \sigma_2$) にあることが分かる．また，体積変化はピーク強度の 0.7-0.85 までは圧縮性を示すが，それ以後は膨張性を示している．したがって，鋼管コンクリート柱などにおけるコンファインド効果による強度増加が重要な問題においては，ピーク強度付近の膨張性を正確に考慮しなければならないが，接線体積弾性係数 (K_t) として以下の式が提案されている．

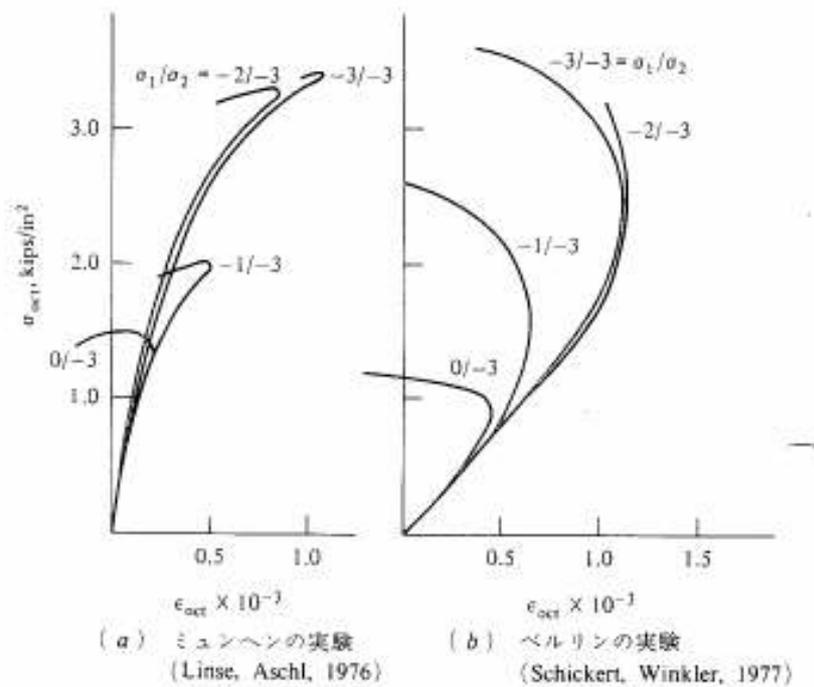


図 5.10 $\sigma_{oct} - \varepsilon_{oct}$ の実験曲線のモデル化，ただし圧縮を正とする．

$$K_t = K_0 \left(1 - C_{\text{exp}} \frac{\sigma_{oct}}{\sigma_{octp}} \right) \quad (5.41)$$

ここに， $K_0 (= E_0 / [3(1 - 2\nu_0)])$ は初期弾性係数， C_{exp} は実験曲線， σ_{octp} は八面体直応力のピーク値 ($f_c' \sim 1.3f_c$) である．また，割線体積弾性係数 (K_s) で表せば以下のようなになる．

$$K_s = K_0 \left(1 - \int_0^{\sigma_{oct}} \frac{C_{\text{exp}}}{\sigma_{octp}} d\sigma_{oct} \right) \quad (5.42)$$

(2) 3 軸圧縮応力状態でのコンクリートの応力・ひずみ曲線

図 5.11 は，Balmer(1949)による 3 軸圧縮応力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) でのコンクリートの応力・ひずみ関係の実験曲線である．1 軸圧縮応力状態 ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) に比べて，わずかの側方圧力 ($\sigma_p = \sigma_2 = \sigma_3$) の存在がコンクリートの終局強度と終局ひずみ増大に大きく影響することが分かるであろう．

一方，等 3 軸圧縮応力（静水圧応力と呼ぶ）の下ではコンクリートの終局強度は 1 軸圧縮強度（ f_c' ）に比べて非常に大きな値になり，図 5.8 に示すように，割線体積弾性係数 K_s は初期弾性

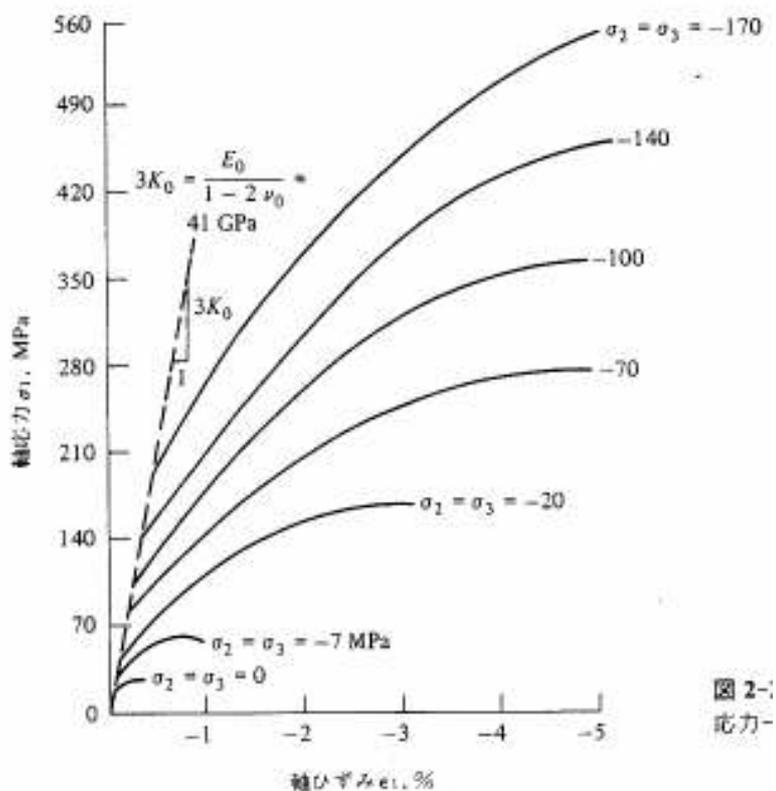


図 2-1
応力-

図 5.11 3 軸圧縮応力状態での応力・ひずみ曲線 (Balmer(1949)による.)

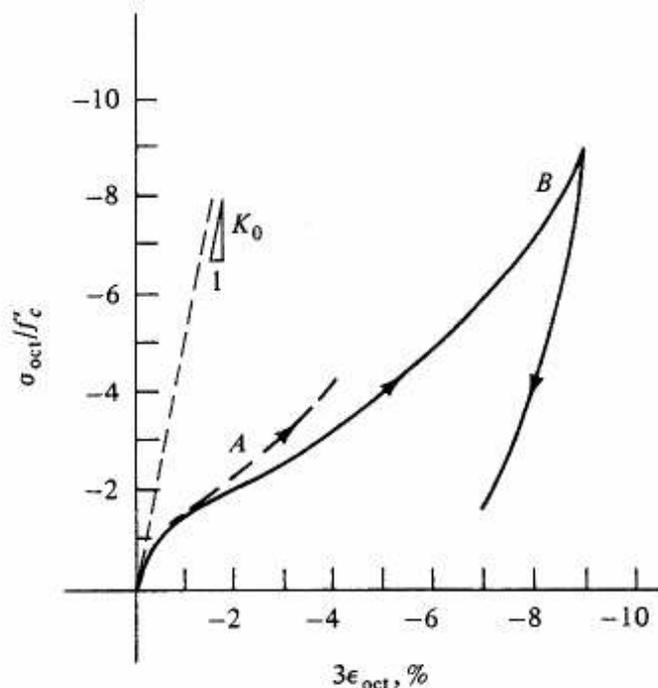


図 5.12 等 3 軸圧縮応力状態での $\sigma_{oct} - \epsilon_{oct}$ の曲線 (圧縮は負)

係数は，2 軸圧縮応力状態と同様，八面体直圧縮応力 σ_{oct} の増加につれて減少するが，より大きな

3 軸圧縮応力状態では一定の値に収束して行くようである。

(3) 2 軸および 3 軸圧縮応力状態でのコンクリートの強度

図 5.13 は 2 軸圧縮応力 (σ_1, σ_2) の下でのコンクリートの破壊強度を示す。1 軸圧縮強度を f_c' とすれば、等 2 軸圧縮 ($\sigma_2 = \sigma_1$) での強度は $1.1-1.2f_c'$ に、 $\sigma_1 = 2\sigma_2$ での強度は、約 $1.3f_c'$ になることが分かる。

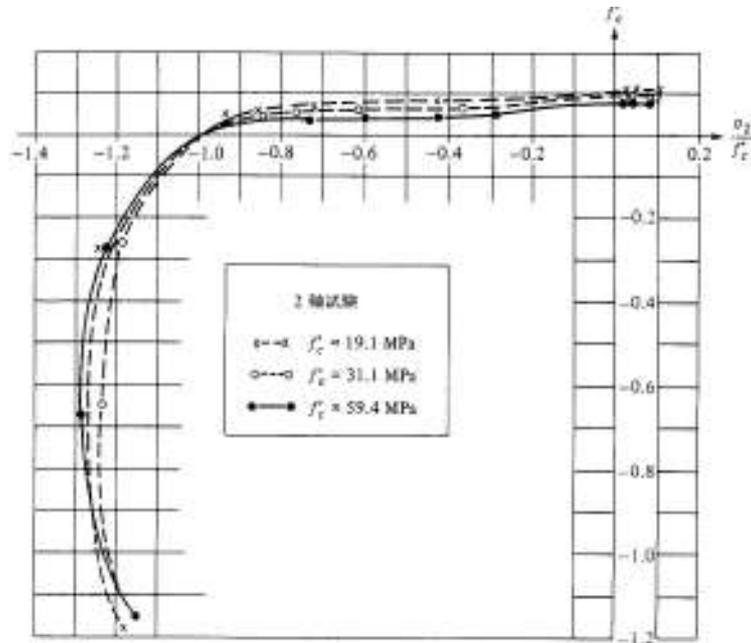


図 2-10 コンクリートの 2 軸強度包絡線 (Kupfer ほか, 1969)

図 5.13 2 軸圧縮でのコンクリート強度

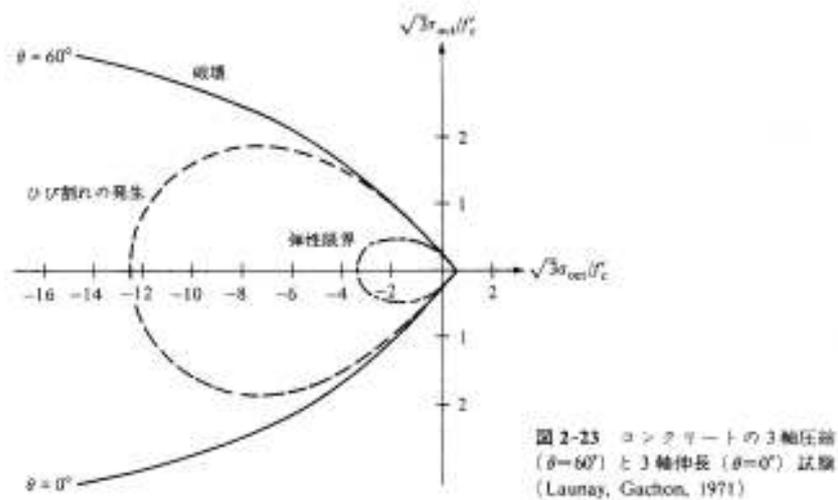


図 5.14 3 軸圧縮でのコンクリート強度

図 5.14 は 3 軸応力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) 状態でのコンクリート強度を $\sigma_{oct} - \tau_{oct}$ の相関曲線で示している。ただし、 θ は相似角 (後述) で、圧縮応力は負としている。 $|\sigma_{oct}|$ の増加につれて、 τ_{oct} が大きくなっていることが分かる。

5. 引張域でのコンクリートの応力-ひずみ曲線について

5.1 引張軟化特性

引張応力を受ける無筋コンクリートは、最大主引張 (σ_1) がコンクリートの引張強度 (f_t') を超えたときに、ひび割れの発生開始が起こり、その後は脆性体としてひび割れが伝播し、最終的に破壊に至る問題となるが、通常の構造物は鉄筋を有しているため、無筋コンクリートの解析問題はここでは除外する。

鉄筋コンクリートの引張領域での応力・ひずみ曲線は、ひび割れ発生直前よりひずみエネルギーを開放し、ひび割れ幅の増大につれて強度を喪失し、ある一定のひび割れ幅以上では引張強度がゼロになると言われている。このようにひずみの増大につれて強度が低下するモデルを脆性破壊モデルと呼ばれている。

一般に、ひずみの増加とともに応力が減少する特性をひずみ軟化特性と呼んでいる。したがって、

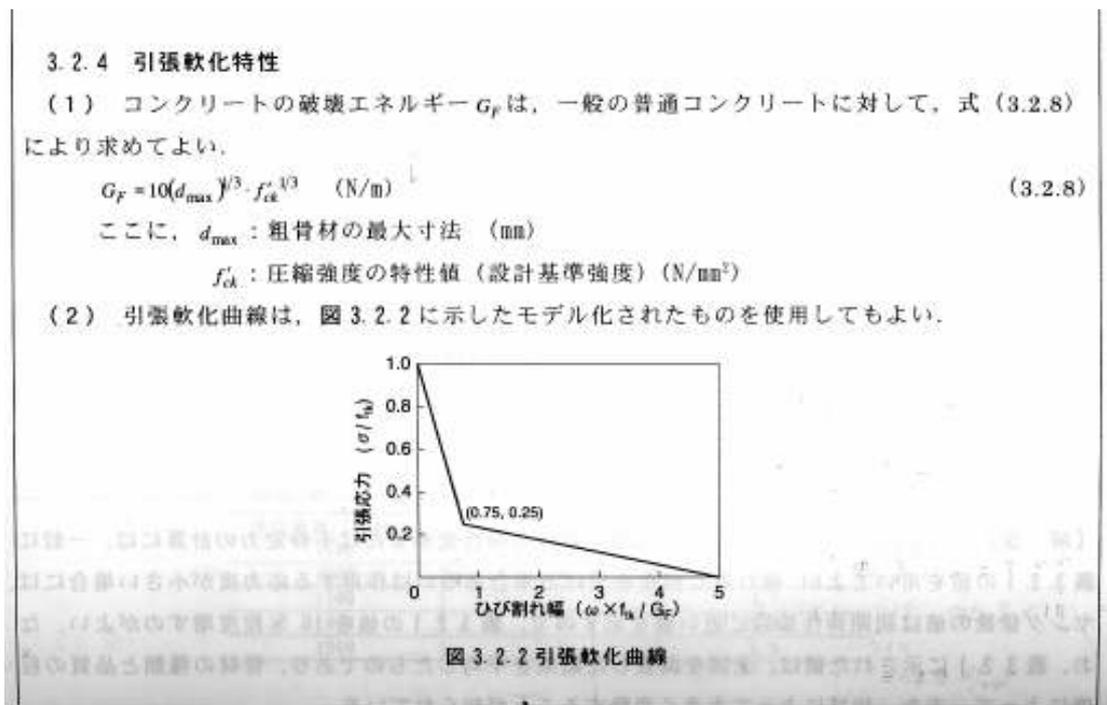


図 5.15 コンクリート標準示方書による引張軟化特性

ひずみ軟化モデルは無筋コンクリートに対する脆性破壊モデルであるが、鉄筋コンクリートでは、引張領域のコンクリートの引張強度に相当するピーク値を超えた後の応力の減少率は鉄筋のような周辺の拘束条件に大きく支配される。図 5.15 は、土木学会コンクリート標準示方書でのコンクリートの引張軟化曲線である。

この種のひずみ軟化を有する構造の解析には、前述の非線形弾性モデルの適用が考えられ、ひび割れ幅が増大し、引張強度がゼロになった後には圧縮のみに抵抗する材料として取り扱われる。

(2) 分散ひび割れモデル

鉄筋コンクリート構造でのひび割れは構造体の表面から発生するので、ここでは、2軸応力状態 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0$)、図 5.16 に示すような、 x 軸から反時計方向の角度 θ に、主引張応力 σ_n が発生し、ひび割れが発生したと考える。分散ひび割れモデルでは、集中するひび割れを要素内に平均化して取り扱う。ひび割れ発生後の要素での応力増分 ($d\sigma^{cr}$) とひずみ増分 ($d\varepsilon^{cr}$) の関係を以下のように表わす。

$$d\sigma^{cr} = E^{cr} d\varepsilon^{cr} \quad (5.43(a))$$

ここに、

$$d\boldsymbol{\sigma}^{cr} = [d\sigma_n \quad d\sigma_t \quad d\tau_{nt}], \quad d\boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = [d\varepsilon_n \quad d\varepsilon_t \quad d\gamma_{nt}] \quad (5.43(b))$$

$$\mathbf{E}^{cr} = \begin{bmatrix} E_n' & 0 & 0 \\ 0 & E_c & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_c \end{bmatrix} \quad (5.43(c))$$

ここに、 E_n' はひび割れ面に直方向の弾性係数で、 $\varepsilon_{cr0} < \varepsilon_n \leq \varepsilon_{crn}$ (ただし ε_{cr0} はひび割れ発生時のひずみ、 ε_{crn} は応力解放時の見かけのひずみ) の領域で $E_n' < 0$ 、 $\varepsilon_n > \varepsilon_{crn}$ の領域で $E_n' = 0$ であり、 E_c 、 G_c はそれぞれコンクリートの弾性係数とせん断弾性係数で、 β (ただし、 $\beta < 1$) はひび割れ面でのせん断伝達係数である。

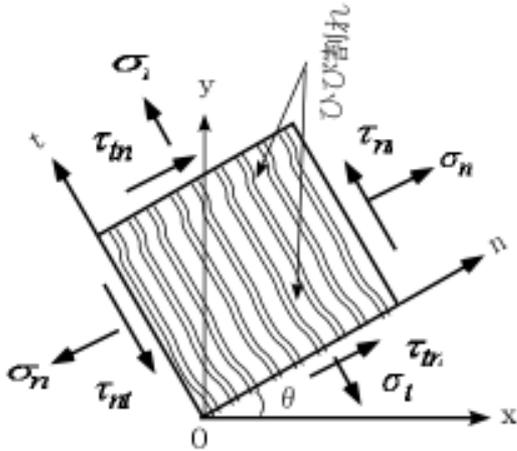


図 5.16 分散ひびわれモデル

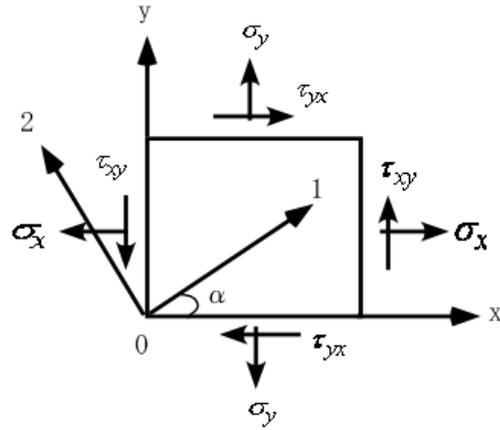


図 5.17 主応力の方向 1&2

(1) 主応力

直交座標軸(x,y)から反時計方向に主応力 (σ_1, σ_2) が発生するとすれば、主応力の大きさは引張応力を正とし、以下ようになる。

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad (5.44)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.45)$$

主応力の方向は以下の式で与えられる。

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (5.46)$$

上式により、角度 α は以下のように与えられる。

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right|, \quad \text{ただし } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \quad (5.47)$$

すなわち、 $\sigma_x \geq \sigma_y$ 、 $\tau_{xy} \geq 0$ の場合は、

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \quad (5.48)$$

$\sigma_x \geq \sigma_y$ 、 $\tau_{xy} \leq 0$ の場合は

$$\alpha = \pi - \frac{1}{2} \arctan \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| \quad (5.49)$$

$\sigma_x \leq \sigma_y$, $\tau_{xy} \geq 0$ 場合は

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| \quad (5.50)$$

$\sigma_x \leq \sigma_y$, $\tau_{xy} \leq 0$ の場合は

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctan \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| \quad (5.51)$$

となる。

(2) 引張軟化特性

一般に、ひび割れの発生は破壊力学の問題であり、難解な問題であるが、ここでは簡単な方法として、要素内の主引張応力度 (σ_1) がコンクリートの一軸引張強度 (f_{tk}) を越えた時にひび割れが開始し、図 1.3 に示すような、ひび割れ内での応力 (σ) とひび割れ幅 (ω) の関係を有するものとする。図中の G_F はひび割れ面の単位面積当たりの破壊エネルギーを意味し、コンクリート標準示方書では以下の式で与えられている。

$$G_F = 10(d_{\max})^{1/3} \cdot f_{ck}' \quad (5.52)$$

ここに、

d_{\max} : 粗骨材の最大寸法(mm)

f_{ck}' : 圧縮強度の特性値 (設計基準強度) (N/mm²)

f_{tk} : 引張強度の特性値で、 $f_{tk} = 0.23 f_{ck}'^{2/3}$ とする。

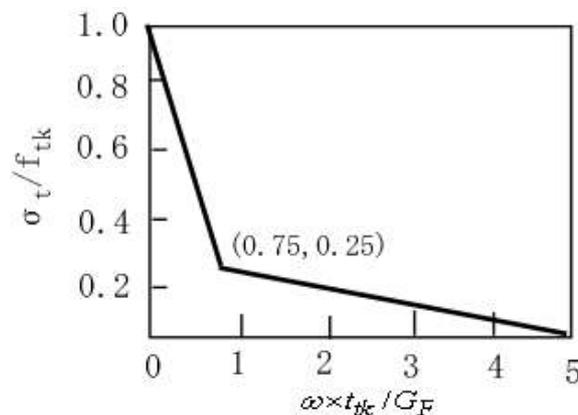


図 5.18 引張軟化曲線 (コンクリート標準示方書による)

(3) ひび割れ要素での応力・ひずみ関係

一つの平面要素 (2次元要素) 内で主引張応力度 (σ_1) が f_{tk} を越え、一方向のひび割れが発生した場合は、主応力の方向の直交座標 ($\mathbf{n}\cdot\mathbf{t}$) に関する応力ベクトル ($\boldsymbol{\sigma}^{cr}$) とひずみベクトル ($\boldsymbol{\varepsilon}^{cr}$) は次式にしたがうものとする。

$$\boldsymbol{\sigma}^{cr} = \mathbf{E}^{cr} \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} \quad (5.53)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\sigma}^{cr} = [\sigma_n \quad \sigma_t \quad \tau_{nt}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} = [\varepsilon_n \quad \varepsilon_t \quad \gamma_{nt}]^T,$$

なお、 ε_n は、ひび割れ間隔に相当する特性値 (λ) を定め、ひび割れ開始時のひずみ (ε_{cr}) にひび割れ幅 (ω) を λ で除した値を加えたものとして次式で与える。

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{cr} + \omega / \lambda \quad (5.54)$$

また、式(5.43)を参照し、

$$\mathbf{E}^{cr} = \begin{bmatrix} \alpha E_c & \alpha \nu_c E_c & 0 \\ \alpha \nu_c E_c & E_c & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_c \end{bmatrix}, \text{ただし } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.55)$$

ここに、 ν_c はポアソン比で、係数 α は、図 5.18 の曲線 $\sigma_t - \omega$ に準じて、次式により求める。

$$\alpha = \sigma_t / f_{tk}, \text{ただし } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.56)$$

さらに、一つの要素内に 2 方向のひび割れが発生した場合には、

$$\mathbf{E}^{cr} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta' G_c \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

とし、 β' は 2 方向のひび割れ面でのせん断伝達係数の小さい方の値を採る。

(4) FEM 解析に用いるための構成関係

FEM 解析では、ひび割れ前に定めた座標系 (x-y) に対して、以下のような構成関係を用いている。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.58)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (5.59)$$

平面応力問題では、

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1 - \nu_c} \begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_c)/2 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

ところで、式(5.44)による主引張応力度 (σ_1) がコンクリートの一軸引張強度 (f_{tk}) を越えたときに、式(5.46)による α の方向にひび割れが発生し、図 5.16 で示した分散ひび割れが $\theta = \alpha$ として取り扱うと、

$$\boldsymbol{\sigma}^{cr} = \mathbf{E}^{cr} \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} \quad (5.61)$$

であり、座標系 (n-t) から (x-y) に変換すると、

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}^{cr} \quad (5.62)$$

ここに、

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin 2\theta \\ -\frac{\sin 2\theta}{2} & \frac{\sin 2\theta}{2} & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}^{cr} \quad (5.64)$$

ここに、

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\frac{\sin 2\theta}{2} \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

したがって、

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{E}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.66)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{T}_\sigma^{-1} \mathbf{E}^{cr} \mathbf{T}_\varepsilon \quad (5.67)$$

となり、ひび割れを有する要素の剛性行列は以下のように表わされる。

$$\mathbf{K}^{cr} = \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)} \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{B}^{(m)T} dV^{(m)} \quad (5.68)$$

ここに、 $\mathbf{B}^{(m)}$ は要素(m)のひずみマトリクスである。

5.2 数値計算による検討

図 5.19 に示す平面応力要素 a-b-c-d を取り上げ、x 方向に引張応力 (σ_x)、y 方向に圧縮応力 ($-\sigma_y$)、そしてせん断応力 (τ_{xy}) を受け、ひずみ ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$) が発生する問題を考える。

最初に、前述の 5.1 で述べた主応力 (σ_1, σ_2) を求め、 $\sigma_1 = f_t'$ になったときに主応力方向の角度 (θ) でひび割れが入り、以後はひび割れ幅 (ω) は図 5.18 にしたがって拡大するものとする。ここでは、ひび割れ間隔に相当する特性値 (λ) を仮定し、ひずみ ε_x をゼロから徐々に増大し、 $\varepsilon_y = -\beta_{sy} \varepsilon_x$ 、 $\gamma_{xy} = \beta_t \varepsilon_x$ 、ここに β_{sy}, β_t は正の係数、としたときの応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) の応答を求める問題を考える。

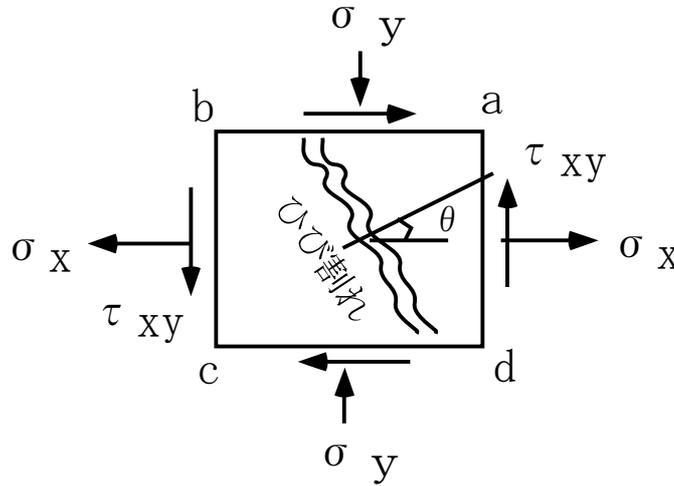


図 5.19 2次元平面要素での応力状態

図 5.18 において、弾性係数を $E_c = 3 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比を $\nu_c = 1/6$ 、 $GF = 100 \text{ N/m}$ 、 $f_t' = 3 \text{ N/mm}^2$ としたときの計算をエクセル・マクロ・VBA にて行う。

計算手順は、(1)主応力値 (σ_1, σ_2) とひび割れ方向 (θ) を求め、ひび割れ発生時の弾性限界ひずみ (ε_x^{cr}) を求め、(2)ひび割れ発生後は、図 5.18 による $\omega f_t' / GF$ に応じた応力 (σ_x) の低減を行い、ひび割れによる等価ひずみ $\varepsilon_x = \varepsilon_x^{cr} + \omega / \lambda$ 、ここに λ はひび割れ間隔に相当する特性値とし、式(5.43(c)) による割線弾性係数行列 (\mathbf{E}^{cr}) を決定する。つぎに、式(5.67)による座標変換と式(5.66)の関係を用い、応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) を決定する。

計算結果を図 5.20 および図 5.21 に示す。図 5.20 は、 $\lambda = 100 \text{ mm}$ 、 $\beta = 0.5$ 、 $\beta_{sy} = \beta_t = 0$ としたときの σ_x の応答値を示している。このケースでは、ひび割れ方向は $\theta = 0$ であり、 $\sigma_y = -E_c \nu_c \varepsilon_x$ 、 $\tau_{xy} = 0$ であり、 σ_x の応答値のみを示している。図 5.21 は、 $\lambda = 100 \text{ mm}$ 、 $\beta = 0.5$ 、 $\beta_{sy} = 0.2$ 、 $\beta_t = 0.5$ での σ_x 、 σ_y および τ_{xy} の応答値を示している。このケースでは、ひび割れ方向は $\theta = 11.3^\circ$ であり、 σ_y 圧縮になっている。

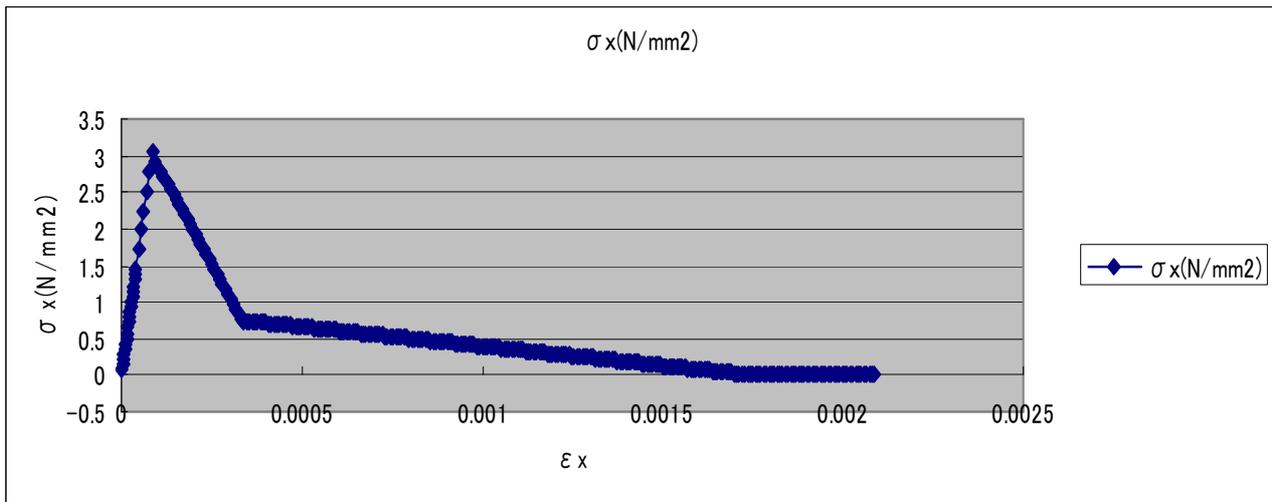


図 5.20 $\lambda = 100\text{mm}$, $\beta = 0.5$, $\beta_{sy} = \beta_t = 0$ での σ_x の応答値

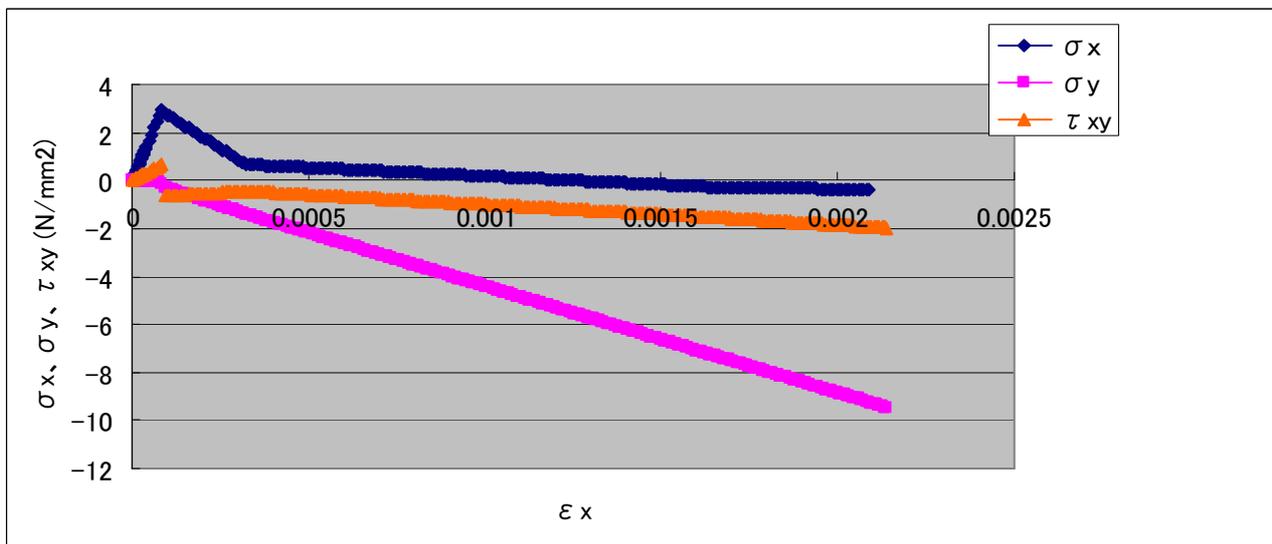


図 5.21 $\lambda = 100\text{mm}$, $\beta = 0.5$, $\beta_{sy} = 0.2$, $\beta_t = 0.5$ での σ_x , σ_y , τ_{xy} の応答値

参考 エキセル・マクロ・VBA のプログラミング

```
Private Sub CommandButton1_Click()
```

```
Dim EM0(3, 3), EMCR(3, 3), Tsigm(10, 10), Teps(3, 3), AMW(3, 3), BMW(3, 3)
Dim AA(100, 100), Aeps(3), Deps(3), ASigm(3)
```

```
N = 3
```

```
Ec = 30000#: Ft = 3#: Rniu = 1# / 6#
Gc = Ec / (2# * (1# + Rniu))
Epstx0 = Ft / Ec
```

```
Sheet1.Cells(1, 1) = "Ft(N/mm2)=": Sheet1.Cells(1, 2) = Ft: Sheet1.Cells(1, 3) =
```

```

"Ec(N/mm2)=": Sheet1.Cells(1, 4) = Ec
Sheet1.Cells(1, 5) = "Rniu=": Sheet1.Cells(1, 6) = Rniu

'Input Data
BetaSY = 0.2: BetaT = 0.5
GF = 0.1: Omeg = GF / Ft
Ramda = 100#: EpsCrack = Omeg / Ramda

Bcrack = 0.5

Pai = 3.141569

W = Ec / (1# - Rniu)
EM0(1, 1) = 1# * W: EM0(1, 2) = Rniu * W: EM0(1, 3) = 0#
EM0(2, 1) = Rniu * W: EM0(2, 2) = 1# * W: EM0(2, 3) = 0#
EM0(3, 1) = 0#: EM0(3, 2) = 0#: EM0(3, 3) = W * (1# - Rniu) / 2#

Epsmax = 0#: IP = 0: Alp = 0#: Epscr0 = 0#

For i = 1 To 300

If i <= 20 Then Epsx = 0.02 * i * Epstx0
If i > 20 Then Epsx = (0.4 + (i - 20) * 0.075) * Epstx0

Epsy = -BetaSY * Epsx
Gamxy = BetaT * Epsx

Aeps(1) = Epsx: Aeps(2) = Epsy: Aeps(3) = Gamxy

For k = 1 To 3
W = 0#
For L = 1 To 3
W = W + EM0(k, L) * Aeps(L)
Next L
ASigm(k) = W
Next k
Sigmx = ASigm(1): Sigmy = ASigm(2): Tauxy = ASigm(3)

W = 0.25 * (Sigmx - Sigmy) ^ 2 + Tauxy ^ 2
Sigm1 = 0.5 * (Sigmx + Sigmy) + Sqr(W)
Sigm2 = 0.5 * (Sigmx + Sigmy) - Sqr(W)
W = 0.25 * (Epsx - Epsy) ^ 2 + 0.25 * Gamxy ^ 2
Eps1 = 0.5 * (Epsx + Epsy) + Sqr(W)
Eps2 = 0.5 * (Epsx + Epsy) - Sqr(W)

If Sigm1 <= Ft And IP = 0 Then
If Aeps(1) > Epsmax Then Epsmax = Aeps(1)

```

```

Sheet1.Cells(i + 2, 1) = Aeps(1): Sheet1.Cells(i + 2, 2) = Sigmx
Sheet1.Cells(i + 2, 4) = Aeps(2): Sheet1.Cells(i + 2, 5) = Sigmy
Sheet1.Cells(i + 2, 7) = Aeps(3): Sheet1.Cells(i + 2, 8) = Tauxy
Sheet2.Cells(i + 2, 1) = Eps1: Sheet2.Cells(i + 2, 2) = Depscr / EpsCrack: Sheet2.Cells(i + 2,
3) = FtCrack / Ft
Sheet2.Cells(i + 2, 4) = Theta * 57.3
IP = 0

```

```

ElseIf Sigm1 > Ft And IP = 0 Then

```

```

W = 2# * Tauxy / (Sigmx - Sigmy)
ALp0 = 0.5 * Atn(W)
IP = i: Epscr0 = Eps1

```

```

If Sigmx > Sigmy And Tauxy > 0# Then
Alp = ALp0
ElseIf Sigmx > Sigmy And Tauxy < 0# Then
Alp = Pai - ALp0
ElseIf Sigmx < Sigmy And Tauxy > 0# Then
Alp = 0.5 * Pai - ALp0
ElseIf Sigmx < Sigmy And Tauxy < 0# Then
Alp = 0.5 + ALp0
Else
End If

```

```

Theta = Alp

```

```

CC2 = Cos(Theta) ^ 2: SS2 = Sin(Theta) ^ 2: S2T = Sin(2# * Theta): C2T = CC2 - SS2

```

```

Tsigm(1, 1) = CC2: Tsigm(1, 2) = SS2: Tsigm(1, 3) = S2T
Tsigm(2, 1) = SS2: Tsigm(2, 2) = CC2: Tsigm(2, 3) = -S2T
Tsigm(3, 1) = -0.5 * S2T: Tsigm(3, 2) = 0.5 * S2T: Tsigm(3, 3) = C2T

```

```

Teps(1, 1) = CC2: Teps(1, 2) = SS2: Teps(1, 3) = 0.5 * S2T
Teps(2, 1) = SS2: Teps(2, 2) = CC2: Teps(2, 3) = -0.5 * S2T
Teps(3, 1) = -S2T: Teps(3, 2) = S2T: Teps(3, 3) = C2T

```

```

Matinv Tsigm(), N

```

```

Sheet1.Cells(i + 2, 1) = Aeps(1): Sheet1.Cells(i + 2, 2) = Sigmx
Sheet1.Cells(i + 2, 4) = Aeps(2): Sheet1.Cells(i + 2, 5) = Sigmy
Sheet1.Cells(i + 2, 7) = Aeps(3): Sheet1.Cells(i + 2, 8) = Tauxy
Sheet2.Cells(i + 2, 1) = Eps1: Sheet2.Cells(i + 2, 2) = Depscr / EpsCrack: Sheet2.Cells(i
+ 2, 3) = FtCrack / Ft

```

```

Else

```

```

Depscr = Eps1 - Epscr0
W = Ft

```

```

If Depscr <= 0.75 * EpsCrack Then W = Ft * (1# - Depscr / EpsCrack)

```

If Depscr > 0.75 * EpsCrack And Depscr < 5# * EpsCrack Then W = 0.294 * Ft * (1# - 0.2 * Depscr / EpsCrack)

If Depscr > 5# * EpsCrack Then W = 0#

FtCrack = W

EcCrack = FtCrack / Eps1

EMCR(1, 1) = EcCrack: EMCR(1, 2) = 0#: EMCR(1, 3) = 0#

EMCR(2, 1) = 0#: EMCR(2, 2) = Ec: EMCR(2, 3) = 0#

EMCR(3, 1) = 0#: EMCR(3, 2) = 0#: EMCR(3, 3) = Bcrack * EM0(3, 3)

For k = 1 To 3

For L = 1 To 3

W = 0#

For M = 1 To 3

W = W + EMCR(k, M) * Teps(M, L)

Next M

AMW(k, L) = W

Next L

Next k

For k = 1 To 3

For L = 1 To 3

W = 0#

For M = 1 To 3

W = W + Tsigm(k, M) * AMW(M, L)

Next M

BMW(k, L) = W

Next L

Next k

W = 0#

For k = 1 To 3

W = 0#

For L = 1 To 3

W = W + BMW(k, L) * Aeps(L)

Next L

ASigm(k) = W

Next k

Sheet1.Cells(i + 2, 1) = Aeps(1): Sheet1.Cells(i + 2, 2) = ASigm(1)

Sheet1.Cells(i + 2, 4) = Aeps(2): Sheet1.Cells(i + 2, 5) = ASigm(2)

Sheet1.Cells(i + 2, 7) = Aeps(3): Sheet1.Cells(i + 2, 8) = ASigm(3)

Sheet2.Cells(i + 2, 1) = Eps1: Sheet2.Cells(i + 2, 2) = Depscr / EpsCrack: Sheet2.Cells(i + 2, 3) = FtCrack / Ft

Sheet2.Cells(i + 2, 4) = Theta * 57.3

End If

Next i

Stop

End Sub

以上