

# 塑性増分理論による定式化

## 負荷関数と関連流動則

### 1. 降伏条件と負荷関数

図 6.1 に示すように、非線形特性を持つ応力・ひずみ曲線において、たとえば点 P から除荷したときの回復ひずみ  $\varepsilon_e$  を弾性ひずみ、残留するひずみ  $\varepsilon_p$  を塑性ひずみといい、応力増加につれて弾性ひずみと塑性ひずみがともに増加する材料を弾・塑性体と呼んでいる。

まず最初に、図 6.1 に示すような 1 軸応力・ひずみ関係を持つ材料を取り上げる。ここでは、応力レベルの小さい範囲 (Y-Y') では弾性体であり、この範囲では除荷しても  $\varepsilon_p = 0$  であり、点 Y または Y' で降伏 (yield) し、その後、Y-P のように弾・塑性体として挙動するものとする。

さて、図 6.1 の応力・ひずみ曲線を有する材料が多軸応力状態でのひずみがどのようになるのかを定式化するのが本節の課題である。図 6.2 では応力テンソル ( $\sigma_{ij}$ ) の空間での降伏点 (Y または Y') に相当する曲面を赤字で表し、これを“降伏曲面”と呼んでいる。この曲面を越えた応力状態は図 6.1 の弾塑性域 (Y-P) であり、ここから除荷し、逆方向に載荷すれば再降伏が起こり、図 6.2 の点線で示したように、バウシinger 効果により降伏曲面は移動する。一般に、最初の降伏曲面を“初期降伏曲面”，移動した降伏曲面を“後続降伏曲面”と呼び、それらを総称して“負荷曲面”と呼んでいる。さらに応力が増加する材料の破壊点に至り、現有強度が保持できず、応力が解放状態 (図 6.1 の B 点に対応) になるので、負荷曲面は“限界曲面”に接することになる。

さて、以下の議論において、初期降伏曲面を  $\varphi(\sigma_{ij}) = 0$ 、後続降伏曲面を  $\varphi(\sigma_{ij}, \kappa) = 0$ 、そして限界曲面を  $\psi(\sigma_{ij}) = 0$  と表す。

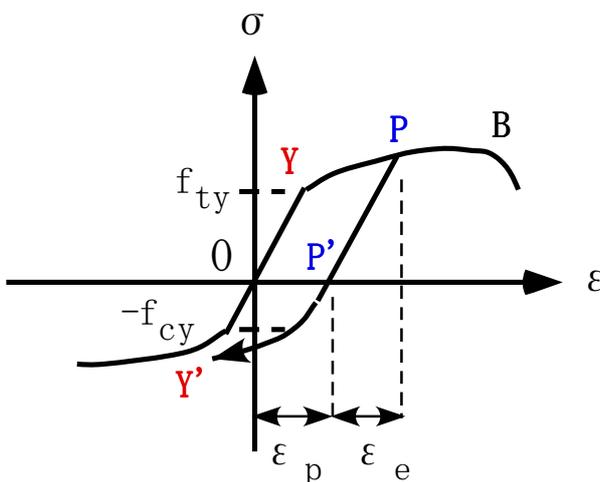


図 6.1 1 軸応力・ひずみ曲線

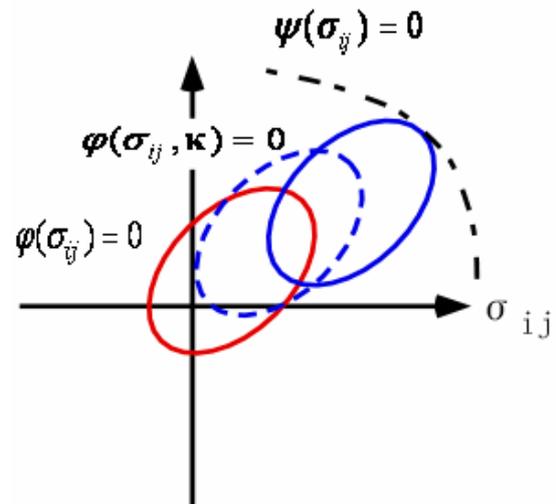


図 6.2 負荷曲面と限界曲面

### 2. 関連流動則

金属材料の降伏に関して、Drucker と Prager によって提唱された“関連流動則”とは、降伏後の応力増分 ( $d\sigma_{ij}$ ) によって発生するひずみ増分 ( $d\varepsilon_{ij}^p$ ) は、負荷曲面の外法線に向かうとし、以下のよう

に表せる.

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\mu \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \text{ただし } d\mu > 0 \quad (6.1)$$

ここに,  $d\mu$  は非負のスカラー係数で塑性流動係数と呼ばれ,  $\partial \varphi(\sigma_{IJ}) / \partial \sigma_{IJ}$  は負荷曲面 ( $\varphi = 0$ ) の勾配を表している.

ところで, 図 6.1 で示したように, ひずみ ( $\varepsilon$ ) は弾性ひずみ成分 ( $\varepsilon_e$ ) と塑性ひずみ成分 ( $\varepsilon_p$ ) の和で表せる. したがって, ひずみ増分においても以下のように表す.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (6.2)$$

弾性域は線形であるとするれば, 応力増分 ( $d\sigma_{ij}$ ) とひずみ増分の関係は

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e = E_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (6.3)$$

ここに,  $E_{ijkl}$  は弾性構成テンソルである.

式 (6.1) の関連流増則を考慮すれば,

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\mu \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{kl}}) \quad (6.4)$$

つぎに, 弾・塑性域では, 以下の負荷曲面にしたがうので,

$$\varphi(\sigma_{ij}, \boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (6.5)$$

ここに,  $\boldsymbol{\kappa}$  は後続降伏曲面の移動を規定する係数であり, 負荷パラメータと呼ばれている. 式(6.5)より, 負荷過程では,

$$d\varphi(\sigma_{ij}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} d\boldsymbol{\kappa} = 0, \quad \text{ただし } \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} > 0 \quad (6.6)$$

式 (6.6) は “**適応性の条件**” と呼ばれている.

また, 除荷状態 ( $\partial \varphi / \partial \sigma_{ij} \leq 0$ ) では,  $d\varepsilon_{ij}^p = 0$  より,  $d\lambda = 0$  である.

式(6.4)と式(6.6)より,

$$d\mu = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{kl}}} \cdot \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}} E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} + \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} d\boldsymbol{\kappa} \right), \quad \text{ただし } d\mu > 0 \quad (6.7)$$

以下, 応力増分テンソル, ひずみ増分テンソルおよび弾性構成テンソルなどを行列表示すれば, すなわち

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} &= [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\sigma_z \quad d\tau_{xy} \quad d\tau_{yz} \quad d\tau_{zx}]^T, \\ d\boldsymbol{\varepsilon} &= [d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad d\varepsilon_z \quad d\gamma_{xy} \quad d\gamma_{yz} \quad d\gamma_{zx}]^T, \\ \boldsymbol{\kappa} &= \alpha \boldsymbol{\varepsilon} = \alpha [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T, \quad \alpha \text{ は係数} \\ \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

ここに,  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  である.

$$\partial\varphi_\sigma = \left[ \partial\varphi/\partial\sigma_x \quad \partial\varphi/\partial\sigma_y \quad \partial\varphi/\partial\sigma_z \quad \partial\varphi/\partial\tau_{xy} \quad \partial\varphi/\partial\tau_{yz} \quad \partial\varphi/\partial\tau_{zx} \right]^T$$

$$\omega = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{k}} d\mathbf{k}, \quad \chi = \partial\varphi_\sigma^T \mathbf{E} \partial\varphi_\sigma$$

と表すと、

$$d\mu = \frac{1}{\chi} (\partial\varphi_\sigma^T \mathbf{E} d\boldsymbol{\varepsilon} + \omega), \quad \text{ただし, } d\mu > 0 \quad (6.9)$$

よって、式 6.4 より、弾塑性状態での応力増分とひずみ増分の関係は以下のように表せる。

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \left( d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial\varphi_\sigma^T \mathbf{E} d\boldsymbol{\varepsilon} + \omega}{\chi} \cdot \partial\varphi_\sigma \right) \quad (6.10)$$

### 3. 鋼に対する負荷関数と関連流動則

鋼の初期降伏条件としては、von Mises (フォン・ミセス) がよく知られており、以下のように与えられている。

$$\varphi = J_2 - k^2 = 0 \quad (6.11)$$

ここに、 $k$  はせん断降伏強度、 $J_2$  は偏差応力テンソルの第 2 不変量で、以下のように表せる。

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} \quad (6.12)$$

ここに、 $I_1 = \sigma_{kk}$  は応力テンソルの第 1 次不変量であり、 $\sigma_{oct} = I_1/3$ 、 $\tau_{oct} = \sqrt{2J_2}$  の関係がある。式(6.10)の初期降伏条件は、図 6.3 に示すような主応力( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ )軸に等しい角度を持つ方向： $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  に断面を持つ円筒面を示し、初期降伏条件は、図 6.4 に示すような  $\pi$  平面上では半径 ( $\sqrt{2}k$ ) の円となる。

ところで、1 軸応力・ひずみ曲線が図 6.5 の赤線で示されるような完全塑性体として鋼材が取り扱える場合には、ひずみ硬化は無く、初期降伏曲面が負荷曲面になり、関連流動則により塑性ひずみ増分は以下のように与えられる。

$$de_{ij}^p = d\mu \frac{\partial\varphi(s_{ij})}{\partial s_{ij}} = d\mu \frac{\partial J_2}{\partial s_{ij}} = d\mu \cdot s_{ij} \quad (6.13)$$

$$d\varepsilon_{kk}^p = 0 \quad (6.13')$$

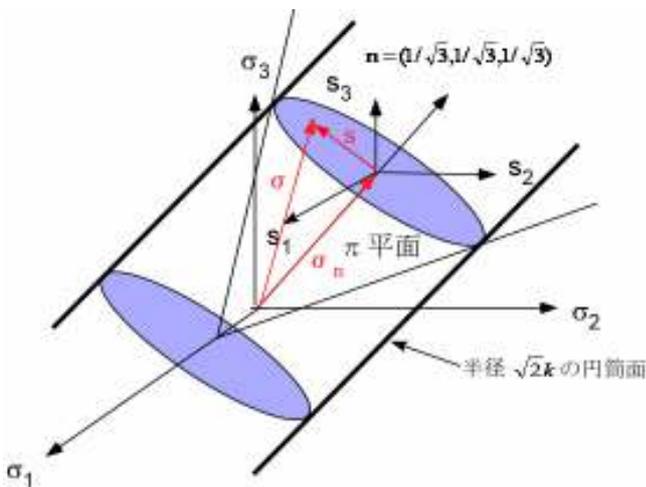


図 6.3 von Mises の降伏条件

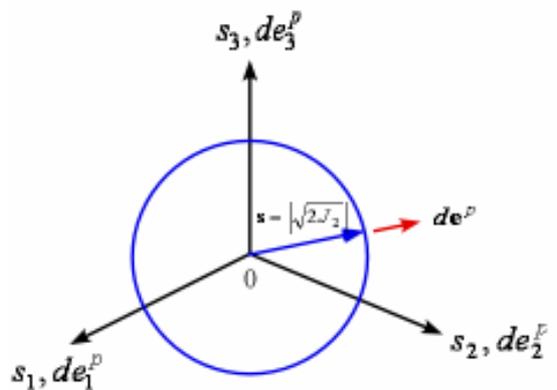


図 6.4  $\pi$  平面での降伏条件

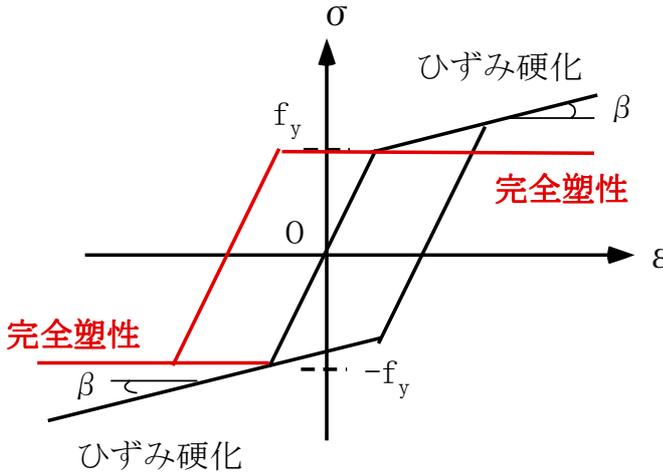


図 6.5 鋼の一軸応力・ひずみ曲線の例

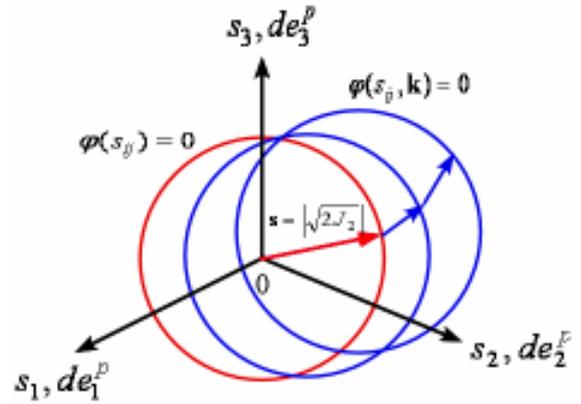


図 6.6 π 平面上の負荷曲面

弾性条件は

$$ds_{ij} = 2G(de_{ij} - de_{ij}^p) = 2G(de_{ij} - d\mu \cdot s_{ij}) \quad (6.14)$$

$$d\sigma_{kk} = Kd\varepsilon_{kk} \quad (6.15)$$

ここに,

$$G = \frac{E}{2 + \nu}, \quad K = \frac{E}{1 - 2\nu}$$

塑性流動を保持する条件 (“**適応の条件**”と言う) は

$$d\varphi(s_{ij}) = \frac{\partial \varphi(s_{ij})}{\partial s_{ij}} ds_{ij} = s_{ij} ds_{ij} = 0 \quad (6.16)$$

よって,

$$2G(s_{ij} de_{ij} - d\mu \cdot s_{ij} s_{ij}) = 0 \quad (6.17)$$

$$d\mu = \frac{s_{ij} de_{ij}}{s_{ij} s_{ij}} = \frac{s_{ij} de_{ij}}{2k^2} \quad (6.18)$$

上式は  $d\mu > 0$  の時のみ有効であり,  $d\mu < 0$  は除荷過程に入り, 弾性回復するので,  $d\mu = 0$  として取り扱う。したがって, 塑性状態での応力増分とひずみ増分の関係は以下のように与えられる。

$$ds_{ij} = 2G \left[ de_{ij} - \frac{s_{mn} de_{mn}}{2k^2} \cdot s_{ij} \right] \quad (6.19)$$

上式と式(6.15)を組み合わせると

$$d\sigma_{ij} = 2G \left[ de_{ij} - \frac{s_{mn} de_{mn}}{2k^2} \cdot s_{ij} \right] + Kd\varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (6.20)$$

ここに,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーデルタ (単位テンソル) である。

最後に, 行列表示するために,

$$d\boldsymbol{\sigma} = [d\sigma_x \quad d\sigma_y \quad d\sigma_z \quad d\tau_{xy} \quad d\tau_{yz} \quad d\tau_{zx}]^T,$$

$$\mathbf{s} = [s_x \quad s_y \quad s_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T,$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = [d\varepsilon_x \quad d\varepsilon_y \quad d\varepsilon_z \quad d\gamma_{xy} \quad d\gamma_{yz} \quad d\gamma_{zx}]^T,$$

$$d\mathbf{e} = [de_x \ de_y \ de_z \ d\gamma_{xy} \ d\gamma_{yz} \ d\gamma_{zx}]^T$$

ここに,

$$s_x = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z), \quad s_y = \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z), \quad s_z = \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)$$

$$de_x = \frac{1}{3}(2d\varepsilon_x - d\varepsilon_y - d\varepsilon_z), \quad de_y = \frac{1}{3}(2d\varepsilon_y - d\varepsilon_x - d\varepsilon_z), \quad de_z = \frac{1}{3}(2d\varepsilon_z - d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)$$

とけば, 式(6.20)は次式のように表される.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{G}{k^2}\mathbf{D}d\mathbf{e} \quad (6.21)$$

$$d\mathbf{e} = \mathbf{I}_e d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.22)$$

ここに,  $\mathbf{E}$ は式(6.8)の弾性係数行列であり, 他の行列は以下のように与えられる.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} s_x^2 & s_x s_y & s_x s_z & s_x \tau_{xy} & s_x \tau_{yz} & s_x \tau_{zx} \\ s_y s_x & s_y^2 & s_y s_z & s_y \tau_{xy} & s_y \tau_{yz} & s_y \tau_{zx} \\ s_z s_x & s_z s_y & s_z^2 & s_z \tau_{xy} & s_z \tau_{yz} & s_z \tau_{zx} \\ \tau_{xy} s_x & \tau_{xy} s_y & \tau_{xy} s_z & \tau_{xy}^2 & \tau_{xy} \tau_{yz} & \tau_{zx}^2 \\ \tau_{yz} s_x & \tau_{yz} s_y & \tau_{yz} s_z & \tau_{yz} \tau_{xy} & \tau_{yz}^2 & \tau_{yz} \tau_{zx} \\ \tau_{zx} s_x & \tau_{zx} s_y & \tau_{zx} s_z & \tau_{zx} \tau_{xy} & \tau_{zx} \tau_{yz} & \tau_{zx}^2 \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

$$\mathbf{I}_e = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

つぎに, 1軸応力・ひずみ曲線が図6.5のひずみ硬化を有する鋼材に対して, 初期降伏曲面と負荷曲面を考えれば, 初期降伏後も弾性域の大きさは変わらないので,

$$\varphi = \frac{1}{2}(s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p)(s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p) - k^2 = 0 \quad (6.21)$$

ここに,  $\beta_s$ は図6.5のひずみ硬化係数( $\beta$ )に対応する係数であり,  $e_{ij}^p$ は偏差ひずみテンソルの塑性成分であり, 式(6.21)は図6.4に示すような $\pi$ 平面上での初期降伏曲面と後続降伏曲面を表し, 移動硬化モデルの一つとして知られている.

さて, 式(6.12)は偏差応力( $s_{ij}$ )で与えられているので, 関連流動則は以下のようになり,

$$de_{ij}^p = d\mu \frac{\partial \varphi(s_{ij}, \mathbf{k})}{\partial s_{ij}}, \quad \text{ただし, } d\mu > 0 \quad (6.22)$$

すなわち, 偏差応力テンソル $s_{ij}$ に対応するひずみ増分は偏差ひずみ増分テンソル $de_{ij}^p$ となる. また, 体積ひずみ増分( $d\varepsilon_{kk}$ )の塑性成分はゼロであり,

$$d\varepsilon_{kk} = d\varepsilon_{kk}^e,$$

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p = de_{ij}^e + d\mu \frac{\partial \varphi(s_{ij}, \mathbf{k})}{\partial s_{ij}} \quad (6.23)$$

弾性則より

$$d\sigma_{kk} = 3Kd\varepsilon_{kk} \quad , \quad ds_{ij} = 2Gde_{ij}^e = 2G \left[ de_{ij} - d\mu \frac{\partial \varphi(s_{ij}, \mathbf{k})}{\partial s_{ij}} \right] \quad (6.24)$$

ここに、 $K = E/[3(1-2\nu)]$ 、 $G = E/[2(1+\nu)]$ である。

つぎに“**適応の条件**”は以下のようになる。

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial \varphi}{\partial e_{ij}^p} de_{ij}^p = 0 \quad (6.26)$$

ここに、 $\varphi = \varphi(s_{ij}, \mathbf{k}) = \varphi(s_{ij}, e_{ij}^p)$ とおいている。式(6.12)より

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_{ij}} ds_{ij} = (s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p) ds_{ij} \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial e_{ij}^p} de_{ij}^p = -\beta_s (s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p) de_{ij}^p \quad (6.27)$$

上式と式(6.15)より

$$2G(s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p) \left( de_{ij} - d\mu \frac{\partial \varphi}{\partial e_{ij}^p} \right) - \beta_s (s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p) d\mu \frac{\partial \varphi}{\partial s_{ij}} = 0$$

式(6.12)を考慮し、塑性流れ係数 ( $d\mu$ ) は以下のように与えられる。

$$d\mu = \frac{2G(s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p) de_{ij}}{F} \quad (6.28)$$

$$F = (2G - \beta_s)(s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p)(s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p) = 2(2G - \beta_s)k^2 \quad (6.29)$$

よって、弾塑性域での応力増分テンソル ( $d\sigma_{ij}$ ) とひずみ増分テンソル ( $de_{ij}$ ) の関係は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= 2Gde_{ij}^e + Kd\varepsilon_{kk} \delta_{ij} = 2G \left[ de_{ij} - d\mu \frac{\partial \varphi}{\partial s_{ij}} \right] + Kd\varepsilon_{kk} \delta_{ij} \\ &= 2G \left[ de_{ij} - d\mu (s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p) \right] + Kd\varepsilon_{kk} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (6.30)$$

最後に、式(6.20)の誘導を行列で表わすために、まず、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T, \quad \mathbf{s} = [s_x \quad s_y \quad s_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T, \quad \mathbf{e} = [e_x \quad e_y \quad e_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T \end{aligned}$$

とおき、以下のように表す。

$$\begin{aligned} s_{ij} de_{ij} &= \mathbf{s}^T d\mathbf{e} \quad , \quad e_{ij}^p de_{ij} = \mathbf{e}^{pT} \mathbf{I}_{dev}^\varepsilon d\mathbf{e} \\ d\mathbf{s} &= \mathbf{I}_{dev}^\sigma d\boldsymbol{\sigma} \quad , \quad d\mathbf{e} = \mathbf{I}_{dev}^\sigma d\boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad d\varepsilon_{kk} \delta_{ij} = \mathbf{I}_{oct} d\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.31)$$

ここに、正方行列： $\mathbf{I}_{oct}^\sigma, \mathbf{I}_{oct}^\varepsilon$  および  $\mathbf{I}_{oct}$  は以下のように定義している。

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{dev}^{\sigma} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, & \mathbf{I}_{dev}^{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{I}_{oct} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{I}_s &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

式(6.28)より,

$$d\mu = \frac{2G}{F} (s_{ij} - \beta_s e_{ij}^p) de_{ij} = \frac{2G}{F} (\mathbf{s}^T d\mathbf{e} - \beta_s \mathbf{e}^p{}^T \mathbf{I}_{dev}^{\varepsilon} d\mathbf{e}) \tag{6.33}$$

上式において, 上付き添え字  $p$  は各ひずみの塑性成分, 右肩の  $T$  は転置を表している.

式(6.20)より, 応力増分とひずみ増分の関係は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\sigma} &= 2G \left[ \mathbf{I}_{dev}^{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} - d\mu (\mathbf{s} - \beta_s \mathbf{e}^p) \right] + K \mathbf{I}_{oct} d\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= 2G \left\{ \mathbf{I}_{dev}^{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{2G}{F} \left[ 2J_2 - 2\beta_s \mathbf{s}^T \mathbf{e}^p + \beta_s^2 (\mathbf{e}^p{}^T \mathbf{I}_{dev}^{\varepsilon} \mathbf{e}^p) \right] d\boldsymbol{\varepsilon} \right\} + K \mathbf{I}_{oct} d\boldsymbol{\varepsilon}
\end{aligned} \tag{6.34}$$

ただし,  $J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{I}_s \mathbf{s}$ , ここに,  $\mathbf{I}_s$  は式(6.22)に示す行列である.

#### 4. コンクリートに対する負荷関数と関連流動則

第5回の資料の中の図 5.14 (図 6.7 に再掲) で示したように, 3 軸圧縮応力の下でのコンクリートの終局強度は, 圧縮応力テンソルの 1 次不変量 ( $I_1 = \sigma_{kk} = 3\sigma_{oct}$ ) が増加するにつれてせん断強度 ( $\tau_{oct} / f'_c$ ) が増加し, 等圧縮応力 ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ) での静水圧  $p$  の状態ではせん断強度は非常に大きくなることが知られている.

したがって, コンクリートに対する負荷曲面:  $\varphi(\sigma_{ij}, \mathbf{k}) = 0$  は,  $\sqrt{J_2} - I_1$  平面または  $\tau_{oct} - \sigma_{oct}$  平面で表わす試みがよく行われている. 最も良く知られた負荷曲面は, 図 6.8 に示すような Drucker-Prager 規準である.

Drucker-Prager 規準は, 金属材料に対する von Mises の規準を圧縮強度と引張強度の異なる材料に拡張したモデルであり, 金属材料に対する Tresca の規準と地盤やコンクリートに対するクーロン・モール規準との関係に類似している.

Drucker-Prager の規準は以下のように与えられている.

$$\varphi(\sigma_{ij}) = \tau_{oct} - \alpha \sigma_{oct} - k = 0 \tag{6.35}$$

ここに,  $\tau_{oct} = \sqrt{2J_2}$ ,  $\sigma_{oct} = I_1/3$  で (圧縮を正),  $\alpha, k$  は材料定数である.

コンクリートの一軸応力・ひずみ関係を図 6.9 のように表せるとすれば, 初期降伏条件に相当する負荷曲面は以下のように表せる.

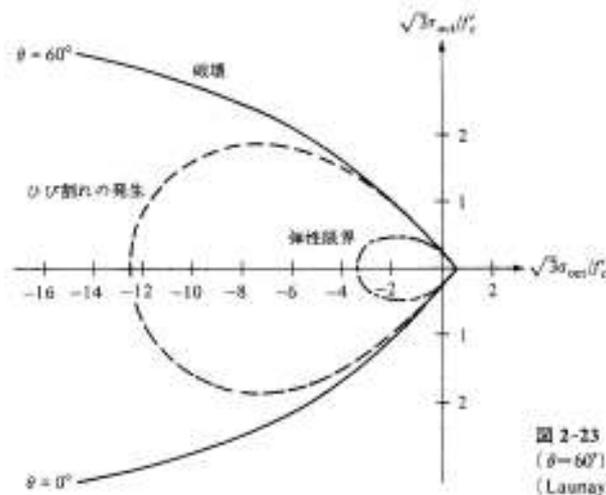


図 6.7 3 軸圧縮状態でのコンクリート強度 (引張を正)

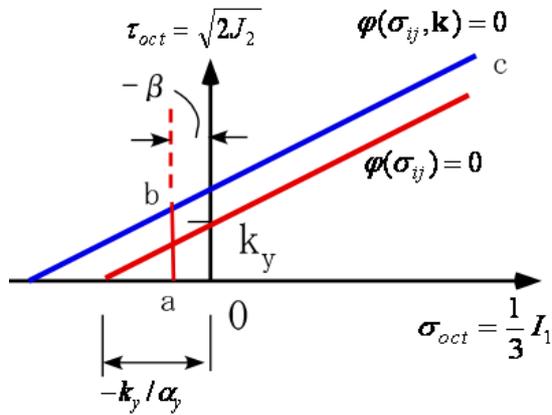


図 6.8 Drucker-Prager 規準に基づく負荷曲面 (圧縮が正)

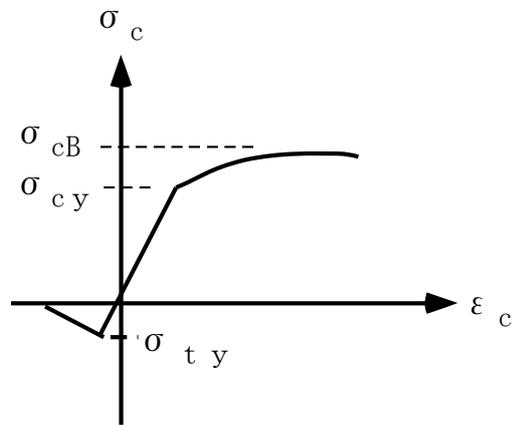


図 6.9 一軸応力・ひずみ関係

$$\varphi(\sigma_{ij}) = \sqrt{2J_2} - \alpha_{ep} \sigma_{oct} - k_y = 0 \quad (6.36)$$

圧縮領域では、初期降伏点を超えると硬化が現れるので、後続降伏条件に対応する負荷曲面は

$$\varphi(\sigma_{ij}) = \sqrt{2J_2} - \alpha_{ep} \sigma_{oct} - k_{ep} = 0 \quad (6.37)$$

ここに、 $k_{ep} = \text{funct}(\gamma_{oct}^p)$  であり、もし、図 6.8 に示すように、負荷曲面が平行移動する場合には、 $\alpha_{ep} = \alpha_y = \text{const.}$  となる。

一方、コンクリートは引張領域では硬化が無く、ひび割れの発生によりひずみ軟化を起こすので、応力の取り得る領域は、 $\sigma_{oct} > -\beta$ 、ここに  $\beta$  はひび割れ強度、となり、負荷曲面は  $\sigma_{oct} = -\beta$  でカット (図 6.8 の a-b) した曲面になる。

つぎに、図 6.8 での曲面 b-c に対する関連流動則により、

$$de_{ij}^p = d\lambda_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial s_{ij}} = d\lambda_\gamma \frac{\sqrt{2}s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad d\varepsilon_{oct}^p = d\lambda_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{oct}} = -\alpha_{ep} d\lambda_\nu \quad (6.38)$$

ただし、 $de_{ij}^p$ 、 $d\varepsilon_{oct}^p$  は偏差ひずみ増分テンソル  $de_{ij}$  および八面体直ひずみ増分  $d\varepsilon_{oct}$  の塑性成分で、 $d\lambda_\gamma \geq 0$ 、 $d\lambda_\nu \geq 0$  の時のみ有効である。

弾性則により， $de_{ij}, d\varepsilon_{oct}$  の弾性成分は以下のように与えられる．

$$de_{ij}^e = \frac{ds_{ij}}{2G}, \quad d\varepsilon_{oct}^e = \frac{d\sigma_{oct}}{3K} \quad (6.39)$$

ここに， $2G = E/(1+\nu)$ ， $3K = E/(1-2\nu)$  である．

適応性の条件は

$$\begin{aligned} d\varphi(\sigma_{ij}, \gamma_{oct}) &= \frac{\partial\varphi}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial\varphi}{\partial \sigma_{oct}} d\sigma_{oct} + \frac{\partial\varphi}{\partial k_{ep}} dk_{ep} \\ &= \frac{\sqrt{2}s_{ij} ds_{ij}}{\sqrt{J_2}} + d\sigma_{oct} - \frac{\partial k_{ep}}{\partial \gamma_{oct}^p} d\gamma_{oct}^p = 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

かつ，

$$\frac{d\varepsilon_{oct}^p}{d\gamma_{oct}^p} = -\alpha_{ep} \quad (6.41)$$

式(6.38)および(6.39)より，

$$ds_{ij} = 2G(de_{ij} - d\lambda_\gamma \frac{\sqrt{2}s_{ij}}{\sqrt{J_2}}), \quad d\sigma_{oct} = 3K(d\varepsilon_{oct} + \alpha_{ep} d\lambda_\nu) \quad (6.42)$$

したがって，

$$h_{ep} = \frac{\partial k_{ep}}{\partial \gamma_{oct}^p}, \quad \gamma_{oct} = \sqrt{2I_2^e}, \quad I_2^e = \frac{e_{ij}e_{ij}}{2}, \quad d\gamma_{oct}^p = \frac{\sqrt{2}e_{ij}^p de_{ij}^p}{\sqrt{I_2^e}} \quad (6.43)$$

とおけば，式(6.40)および(6.42)より，

$$d\lambda_\gamma = \frac{1}{H} \left( \frac{2\sqrt{2}G}{\sqrt{J_2}} s_{ij} de_{ij} + 3K d\varepsilon_{oct} \right) \quad (6.44)$$

$$H = 8G + 2(h_{ep} - 3\alpha_{ep}K) \frac{e_{ij}^p s_{ij}}{\sqrt{I_2^e J_2}} \quad (6.45)$$

$$d\lambda_\nu = \frac{2e_{ij}^p s_{ij}}{\sqrt{I_2^e J_2}} \cdot d\lambda_\gamma \quad (6.46)$$

よって，式(6.42)より応力増分とひずみ増分の関係を得，式(6.31)と同様な行列表示すれば，

$$d\boldsymbol{\sigma} = d\mathbf{s} + d\sigma_{oct} \mathbf{B}_{oct} = 2G(d\mathbf{e} - d\lambda_\gamma \frac{\sqrt{2}\mathbf{s}}{\sqrt{J_2}}) + 3K(d\varepsilon_{oct} + \alpha_{ep} d\lambda_\nu) \mathbf{B}_{oct} \quad (6.47)$$

ここに， $\mathbf{B}_{oct} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  であり，式(6.21)より，

$$d\lambda_\gamma = \frac{1}{H} \left( \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{J_2}} \mathbf{s}^T d\mathbf{e} + K \mathbf{B}_{oct}^T d\boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (6.48)$$

ただし， $d\lambda_\gamma < 0$  の場合は  $d\lambda_\gamma = 0$ ，とする．したがって，

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} &= 2Gd\mathbf{e} + K\mathbf{I}_{oct} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ &\quad - f_1(4\sqrt{2J_2} d\mathbf{e} + K\mathbf{s}\mathbf{B}_{oct}^T d\boldsymbol{\varepsilon}) + f_2 \left[ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{J_2}} \mathbf{B}_{oct} \mathbf{s}^T d\mathbf{e} + K\mathbf{B}_{oct} \mathbf{B}_{oct}^T d\boldsymbol{\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (6.49)$$

ここに，

$$f_1 = \frac{2\sqrt{2}G}{H\sqrt{J_2}}, \quad f_2 = \frac{6Ke_{ep}}{H\sqrt{I_2^e J_2}} \cdot (\mathbf{e}^p)^T \mathbf{s} \quad (6.50)$$

以上