はり，平板およびシェルの FEM 解析法について

１．　はり理論と FEM 解析

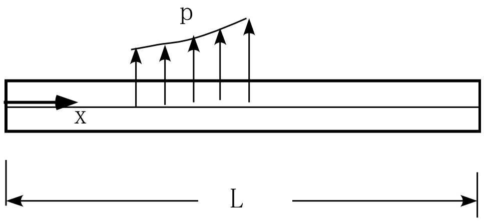


図 1-1　はりの問題

はりのたわみをw，たわみ角を$\theta = dw/dx$，とすれば，曲率ϕは鉛直方向のせん断ひずみγの影響を考慮しない，いわゆる **Bernoulli-Euler はり理論**では，

$$\phi = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 w}{dx^2} \tag{1-1}$$

であり，一方，せん断ひずみγの影響を考慮した **Timoshenko はり理論**では，

$$\phi = \frac{d\beta}{dx},\ \beta = \frac{dw}{dx} - \gamma \tag{1-2}$$

また，せん断力Qとせん断応力τの関係は，

$$\tau = \frac{Q}{\kappa A},\quad \gamma = \frac{\tau}{G} \tag{1-3}$$

ここに，A：断面積，G：せん断弾性係数，κ：せん断修正係数で，長方形断面の場合は$\kappa = 5/6$である．　なお，式(1-3)において$G \to \infty$とすれば，式(1-2)は式(1-1)に対応する．

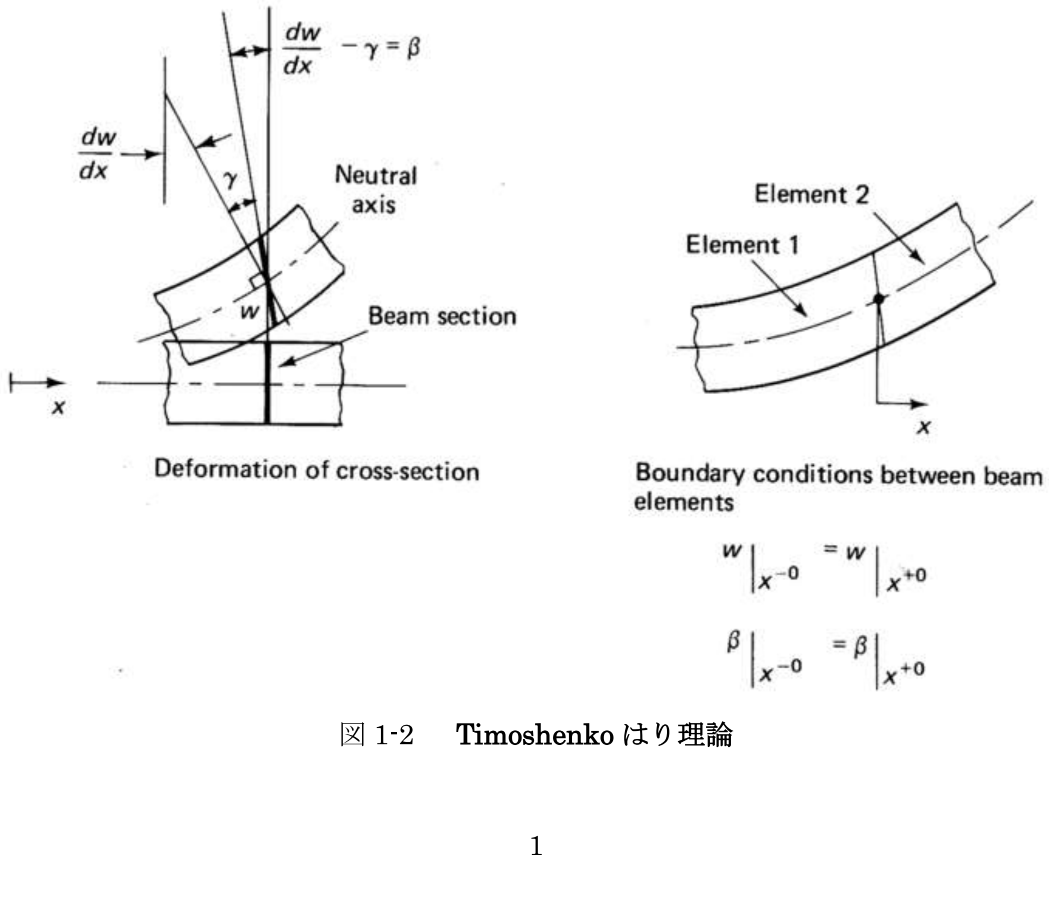


図 1-2　**Timoshenko はり理論**

せん断ひずみの影響を考慮した Timoshenko はり理論では，はり要素間の連続条件は，図 1-2 に示すように，たわみ w と $\beta = dw/dx - \gamma$ の連続条件として与えられ，$\gamma = 0$ とした場合が Bernoulli-Euler はり理論に対応している．

FEM 解析では，Bernoulli-Euler はり理論でも Timoshenko はり理論でもはりの剛性方程式の定式化の手順が同じであるので，以下には，より一般性のある式(1-2)および式(1-3)に基づいて定式化を行う．

図 1 に示すような分布荷重 p を受ける長さ L のはりの全ひずみエネルギー W_i は

$$W_i = \frac{EI}{2}\int_0^L \phi^2 dx + \frac{GA\kappa}{2}\int_0^L \gamma^2 dx \tag{1-4}$$

したがって，ポテンシャルエネルギーは，$\phi = d\beta/dx$，$\gamma = dw/dx - \beta$ より

$$\pi = \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 dx + \frac{GA\kappa}{2}\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta\right)^2 dx - \int_0^L p\ w\ d \tag{1-5}$$

ポテンシャルエネルギー極小の条件：$\delta\pi = 0$ より，

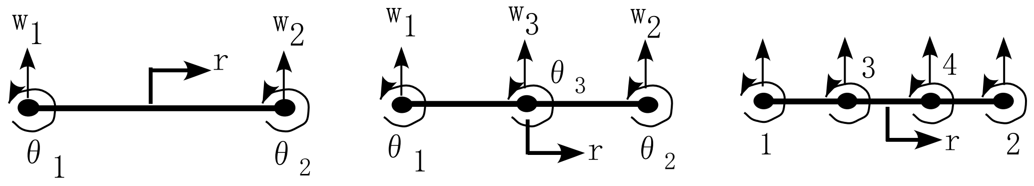
$$EI\int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx}\right)\cdot\delta\left(\frac{d\beta}{dx}\right)dx + GA\kappa\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta\right)\cdot\delta\left(\frac{dw}{dx} - \beta\right)dx - \int_0^L p\cdot\delta w\ dx = 0 \tag{1-6}$$

式(1-6)は図 1 のはりのつりあい条件を意味していることに留意されたい．

さて，解析対象のはりを分割し，各節点でのたわみを w_i，たわみ角を $\theta_i (= \beta_i)$ とし，補間関数 h_i を導入して，要素内のたわみとたわみ角を以下のように表す．

$$w = \sum_{i=1}^{q} h_i w_i,\quad \beta = \sum_{i=1}^{q} h_i \theta_i \tag{1-7}$$

たとえば，$q = 2$，$q = 3$，$q = 4$ での各補間での節点を図 1-3 に示している．



(a) q=2　　(b) q=3　　(c) q=4

図 1-３　2，3,および 4 節点補間の例

たとえば，$q = 2$ の場合は線形補間で，補間関数は

$$h_1 = \frac{1}{2}(1 - r),\quad h_2 = \frac{1}{2}(1 + r) \tag{1-8}$$

$q = 3$ の場合は，２次補間式で，

$$h_1 = -\frac{r}{2}(1 - r),\quad h_2 = \frac{r}{2}(1 + r),\quad h_3 = 1 - r^2 \tag{1-9}$$

$q = 4$ の場合は，3 次補間式で，

$$\begin{aligned} &h_1 = \frac{1}{2}(1 - r) - \frac{1}{2}(1 - r^2) + \frac{1}{16}(-9r^3 + r^2 + 9r - 1) \\ &h_2 = \frac{1}{2}(1 + r) - \frac{2}{3}h_4 - \frac{1}{3}h_3,\quad h_3 = 1 - r^2 + \frac{1}{16}(27r^3 + 7r^2 - 27r - 7, \\ &h_4 = \frac{1}{16}(-27r^3 - 9r^2 + 27r + 9 \end{aligned} \tag{1-10}$$

さて，節点変位ベクトルを$\hat{\mathbf{u}}$，補間関数ベクトルを$\mathbf{H}_w$，$\mathbf{H}_\beta$とすれば，

$$w = \mathbf{H}_w \hat{\mathbf{u}}, \quad \beta = \mathbf{H}_\beta \hat{\mathbf{u}} \tag{1-11}$$

ここに，

$$\hat{\mathbf{u}} = \left[w_1 ....w_q \quad \theta_1 ....\theta_{\mathrm{q}} \right],$$

$$\mathbf{H}_w = \left[h_1 ....h_q \quad 0.........0 \right]^T$$

$$\mathbf{H}_\beta = \left[0.......0 \quad h_1 ....h_q \right]^T$$

さらに，

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \mathbf{B}_w \hat{\mathbf{u}}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \mathbf{B}_\beta \hat{\mathbf{u}} \tag{1-12}$$

ここに，

$$\mathbf{B}_w = \mathbf{J}^{-1} \left[\frac{\partial h_1}{\partial r} .... \frac{\partial h_q}{\partial r} \; 0.......0 \right],$$

$$\mathbf{B}_\beta = \mathbf{J}^{-1} \left[\; 0.......0 \; \frac{\partial h_1}{\partial r} .... \frac{\partial h_q}{\partial r} \right]$$

$$\mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (x_1 h_1 . + ... + x_q h_q)$$

要素剛性行列は以下のように与えられる．

$$\mathbf{K} = EI \int_{-1}^{1} \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{B}_\beta \det \mathbf{J} + GA\kappa \int_{-1}^{1} (\mathbf{B}_w - \mathbf{H}_\beta)^T (\mathbf{B}_w - \mathbf{H}_\beta) \det \mathbf{J} dr \tag{1-13}$$

d eJt= $\partial x / \partial r$

また，荷重ベクトルは

$$\mathbf{R} = \int_{-1}^{1} \mathbf{H}_w^T p \det \mathbf{J} dr \tag{1-14}$$

一例として，図 4 に示すような，荷重 P を受ける長さ L のはりが両端（$x = 0, L$）と中間点（$x = L/2$）に節点を有する場合には，

$$h_1 = -\frac{r}{2}(1-r), \quad h_2 = \frac{r}{2}(1+r), \quad h_3 = 1 - r^2$$

$$x = \sum_{i=1}^{3} h_i x_i = \frac{L}{2}(1+r), \quad \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial r} = \frac{L}{2}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{2}{L}$$

$$\mathbf{B}_w = \frac{2}{L} \cdot \left[\frac{-1+2r}{2} \quad \frac{1+2r}{2} \quad -2r \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$\mathbf{B}_\beta = \frac{2}{L} \cdot \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{-1+2r}{2} \quad \frac{1+2r}{2} \quad -2r \right]$$

$$
\mathbf{K} = \frac{L\ EI}{2}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot d\ r
$$

$$
+\frac{L\ G\kappa A}{2}\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ -h_1 \\ -h_2 \\ -h_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & -h_1 & -h_2 & -h_3 \end{bmatrix}\cdot d\ r \tag{1-15}
$$

ここに,

$$
b_1 = \frac{-1+2r}{L},\quad b_2 = \frac{1+2r}{L},\quad b_3 = -\frac{4r}{L}
$$

であり，荷重は$r = 1/3$の位置に集中荷重－P が作用しているので， $p = P/dx = P/(\det \mathbf{J}dr)$ より

$$
\mathbf{R} = \int_{-1}^{1}\mathbf{H}_w^T p \det \mathbf{J}dr == -\frac{P}{9}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{1-16}
$$

となる.

２.　平板の FEM 解析

前述のはりに対する式(1-1)の曲率ϕと板厚方向のせん断ひずみγは，図 2-1 の平板要素に対しては下記のように拡張される.

$$
u = z\beta_x(x,y),\quad v = -z\beta_y(x,y),\quad w = w(x,y) \tag{2-1}
$$

ここに， u, v はそれぞれ x,y 軸方向の変位， w は z 軸方向のたわみ， β_x， β_y はそれぞれ x,y 軸方向の回転（**rotation**）を表す.

平板の断面内の直ひずみ（$\varepsilon_x, \varepsilon_y$）とねじりせん断ひずみ（$\gamma_{xy}$）は

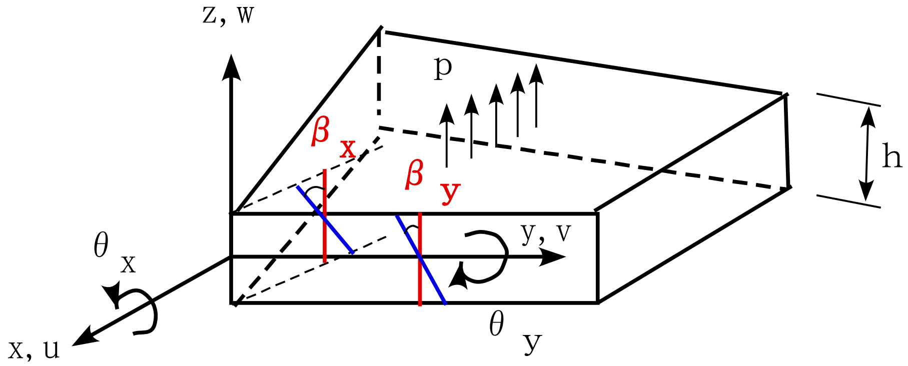


図 2-1　平板要素と断面変形(β_x, β_y)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \partial\beta_x / \partial x \\ -\partial\beta_y / \partial y \\ \partial\beta_x / \partial y - \partial\beta_y / \partial x \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

一方，断面の鉛直方向（z 方向）のせん断ひずみは

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial w / \partial y - \beta_y \\ \partial w / \partial x + \beta_x \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

したがって，弾性平板の応力は

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = z \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial\beta_x / \partial x \\ -\partial\beta_y / \partial y \\ \partial\beta_x / \partial y - \partial\beta_y / \partial x \end{bmatrix} \tag{2-4}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \partial w / \partial y - \beta_y \\ \partial w / \partial x + \beta_x \end{bmatrix} \tag{2-5}$$

分布荷重 p が働く平板の全ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_{A_0} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \cdot dzdA_0 \\ & + \frac{\kappa}{2} \int_{A_0} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} & \gamma_{xz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} \cdot dzdA_0 - \int_{A_0} wpdA_0 \end{aligned} \tag{2-6}$$

ここに，h は板厚，A_0 は平板の中央面の面積を意味している．

式(2-2)～(2-5)を式(2-6)に代入し，行列表示すれば

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{A_0} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\varphi} dA_0 + \frac{1}{2} \int_{A_0} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} dA_0 - \int_{A_0} wpdA_0 \tag{2-7}$$

ここに，

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \partial\beta_x / \partial x \\ -\partial\beta_y / \partial y \\ \partial\beta_x / \partial y - \partial\beta_y / \partial x \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \partial w / \partial y - \beta_y \\ \partial w / \partial x + \beta_x \end{bmatrix} \tag{2-8}$$

$$\mathbf{C}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_s = \frac{Eh\kappa}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-9}$$

全ポテンシャルエネルギー極小の条件，$\delta\pi = 0$ より，

$$\int_{A_0} \delta\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C}_b \boldsymbol{\varphi} dA_0 + \int_{A_0} \delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} dA_0 - \int_{A_0} \delta w p dA_0 = 0 \tag{2-10}$$

たとえば，図 2-2 に示すような，板の中央面内での長方形要素（$\lambda_x \times \lambda_y$）を考えれば，

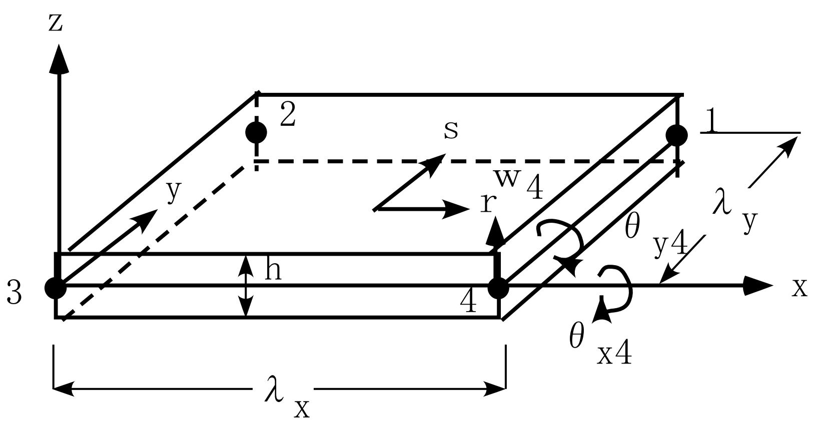


図 2-2　長方形要素

各節点の座標は， $x_1=\lambda_x, y_1=\lambda_y$， $x_2=0, y_2=\lambda_y$， $x_3=0, y_3=0$， $x_4=\lambda_x, y_4=0$ であり，補間関数は

$$h_1=\frac{1}{4}(1+r)(1+s),\quad h_2=\frac{1}{4}(1-r)(1+s),\quad h_3=\frac{1}{4}(1-r)(1-s),\quad h_4=\frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$\mathbf{J}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\lambda_x & 0\\ 0 & \lambda_y\end{bmatrix},\quad \mathbf{J}^{-1}=\frac{2}{\lambda_x\lambda_y}\begin{bmatrix}\lambda_y & 0\\ 0 & \lambda_x\end{bmatrix},\quad \det\mathbf{J}=\frac{\lambda_x\lambda_y}{2}$$

よって，

$$\begin{bmatrix}\partial w/\partial x\\ \partial w/\partial y\end{bmatrix}=\frac{\mathbf{J}^{-1}}{4}\begin{bmatrix}1+s & -1-s & -1+s & 1-s\\ 1+r & 1-r & -1+r & -1-r\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\end{bmatrix} \tag{2-11}$$

式(2-8)の曲率とせん断ひずみベクトルを以下のように表せば,

$$\boldsymbol{\varphi}(r,s)=\mathbf{B}_\phi\hat{\mathbf{u}},\ \boldsymbol{\gamma}(r,s)=\mathbf{B}_s\hat{\mathbf{u}},\ w(r,s)=\mathbf{H}_w\hat{\mathbf{u}} \tag{2-12}$$

ここに,

$$\hat{\mathbf{u}}=\begin{bmatrix}w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & w_2 \ldots\ldots\ldots\theta_{y4}\end{bmatrix}^T \tag{2-13}$$

要素剛性行列は

$$\mathbf{K}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\mathbf{B}_\phi^T\mathbf{C}_b\mathbf{B}_\phi+\mathbf{B}_s^T\mathbf{C}_s\mathbf{B}_s)\,\mathrm{d\ eJt}\cdot d\ r \tag{2-14}$$

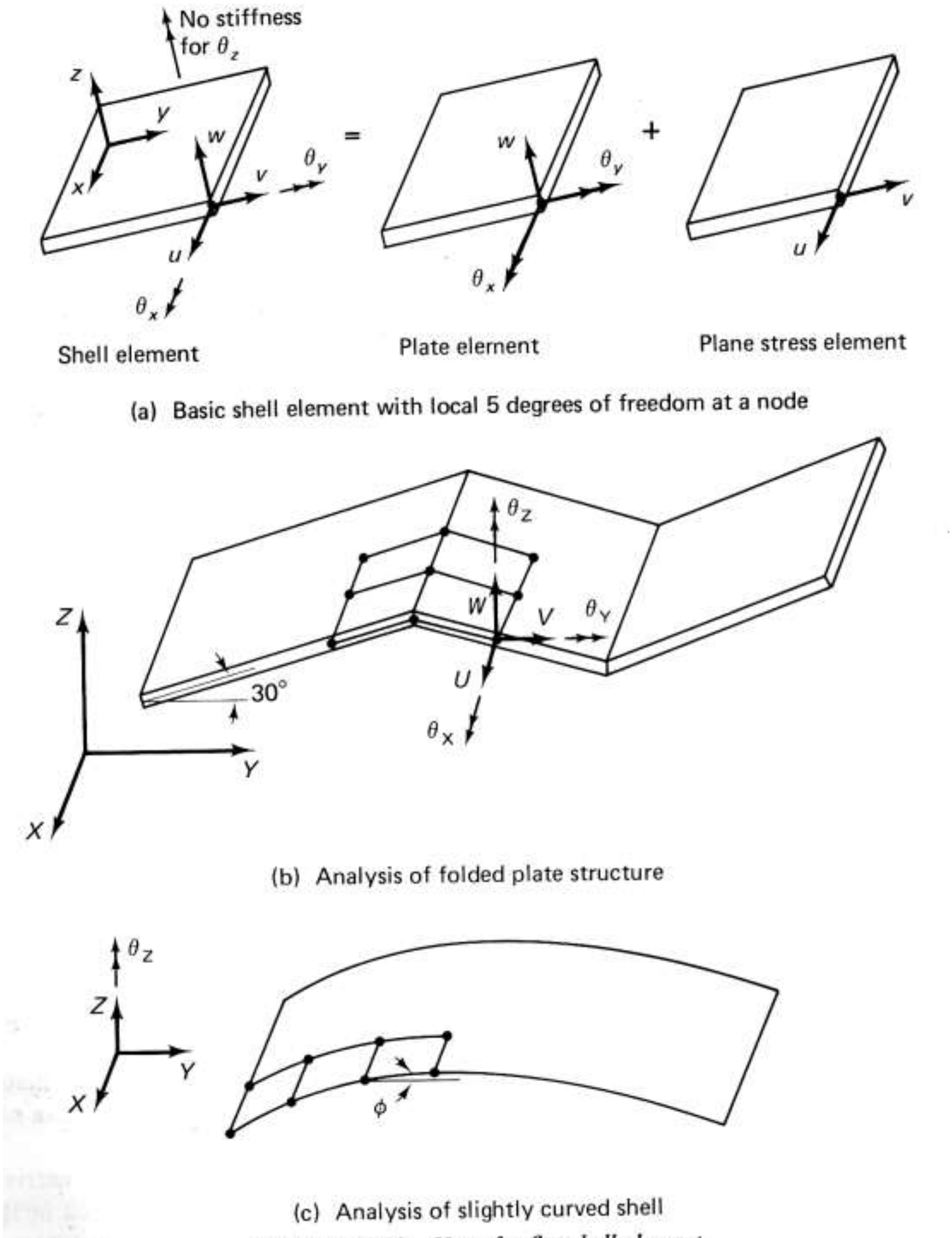
荷重ベクトルは

$$\mathbf{R}_s=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{H}_w^T p\,\mathrm{d\ eJt}\cdot d\ r \tag{2-15}$$

となる．

３．　シェルの FEM 解析

一般に，シェルとは曲面板の構造を指すが，FEM 解析では折板要素の集合体として取り扱っている．



(a) Basic shell element with local 5 degrees of freedom at a node

(b) Analysis of folded plate structure

(c) Analysis of slightly curved shell

FIGURE 4.19 *Use of a flat shell element.*

FIGURE 4.19(a)に示すように，折板の一要素での節点変位としては，前述の３．平板の節点変位（$w_i, \theta_{x1}, \theta_{yi}$）に平面板の面内変位（$u_i, v_i$）を加えたものになっている．また，FIGURE 4.19(c)に示すような曲面板は解析上では FIGURE 4.19(b)のような折板構造として取り扱われている．

いま，FIGURE 4.19(a)に示したような四辺形要素を考えれば，平板として要素剛性行列は，式(2-14)より，

$$\mathbf{K}_B = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\mathbf{B}_\phi^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_\phi + \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s)\,\mathrm{d}\ \mathrm{e}\mathbf{J}\mathrm{t}\cdot d\ r \qquad (3\text{-}1)$$

であり，そのサイズは12×12である．

一方，平面板の面内変形問題での要素剛性行列は

$$\mathbf{K}_M = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (\mathbf{B}_M^T \mathbf{C}_M \mathbf{B}_M) \det \mathbf{J} \cdot d\xi\, d\eta \tag{3-2}$$

ここに，$\mathbf{C}_M$ は平面板の弾性係数行列であり，

$$\mathbf{C}_M = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{3-3}$$

$\mathbf{B}_M$ はひずみ行列であり，そのサイズは8×3であり，$\mathbf{K}_M$ のサイズは8×8である．

したがって，折板要素の剛性行列は以下のようになる．

$$\hat{\mathbf{K}}_{shell} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_M \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

$\hat{\mathbf{K}}_{shell}$ のサイズは20×20となる．

折板要素の集合には全体座標系への変換が必要であるので，

$$\mathbf{K}_{shell} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{K}}_{shell} \mathbf{T} \tag{3-5}$$

ここに，$\mathbf{T}$ は座標変換行列であり，平板要素および平面要素に対するそれぞれのサイズは12×12で，計24×24となり，以下のように与えられる．

$$\mathbf{K}_{shell} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{shell} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3-6}$$

ところで，FEM 解析の実行においては，上式の$\mathbf{K}_{shell}$の行列は特異になるので，以下のように置き換えて実行される．

$$\mathbf{K}_{shell} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{shell} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{3-7}$$

ここに，$\mathbf{I}$ は4×4の単位行列，k は微小な係数で，$\hat{\mathbf{K}}_{shell}$ の最小要素の 1/1000 のオーダに採っている．

以上