補足 A-1　加速度応答スペクトルの計算法

特定の地震加速度記録（$\ddot{z}$）の水平地震動を地盤面に受けた場合の運動方程式の解析法を以下に説明します．すなわち，**回答 4.1** での式(4.1-6)を再掲すると

$$\ddot{\delta} + 2hp\dot{\delta} + p^2\delta = -\ddot{z} \tag{A-1.1}$$

最初に，$\ddot{z} = 0$ としたときの同次方程式

$$\ddot{\delta} + 2hp\dot{\delta} + p^2\delta = 0 \tag{A-1.2}$$

の解は，$\delta = e^{\lambda t}$ の形で与えられ，特性方程式は

$$\lambda^2 + 2hp\lambda + p^2 = 0 \tag{A-1.3}$$

で，その根は

$$\lambda = p(-h \pm \sqrt{h^2 - 1}) \tag{A-1.4}$$

となり，δ の解は以下のようになります．

$$\delta = e^{-hpt}(Ae^{pt\sqrt{h^2-1}} + Be^{-pt\sqrt{h^2-1}}) \tag{A-1.5}$$

ここに，A, B は初期条件から決定される積分定数で，振動する条件は $h < 1$ であり，通常，$0 < h < 1$ にあるので, 式(A-1.5)は以下のように書き換えます．

$$\delta = e^{-hpt}(C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t) \tag{A-1.6}$$

ここに，C_1，C_2 は新たな積分定数，$p_1 = p\sqrt{1 - h^2}$ であり，減衰にある場合の固有周期（T'）は $T' = 2\pi / p_1$ となり，h が十分小さければ，$T' \approx T$ となります．

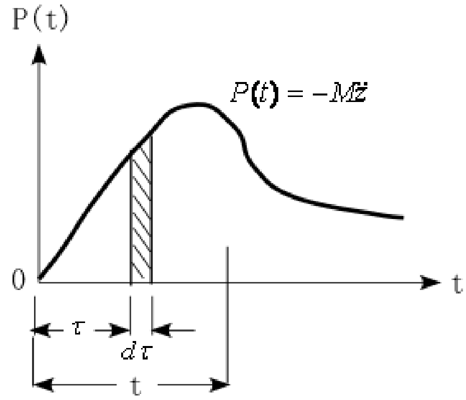

図 A-1.1 地震動による強制力

つぎに, 地震強制力 $P(t) = -M\ddot{z}$ が作用した場合の, 式(4-1.6)の解を考えます. 線形問題であるので, 図 A-1.1 に示すように, 時刻 t の応答変位 $\delta(t)$ を，時刻 τ（ただし $0 \le \tau \le t$），に強制力：$P(t) = -M\ddot{z}$ が作用したときの解の積分による方法（重ね合わせの原理）を適用して求めます．運動量保存則により，$t = \tau$ でのパルス状の力積（$P(\tau)d\tau$）は運動量 Mv，ただし v は速度，に等しいので，時刻 τ に初速度 $v = P(\tau)d\tau / M$ を与えたときの時刻 $t - \tau$ での応答変位は以下のように表すことができます．

すなわち，式(A-1.6)で座標 t を $t - \tau$ に置き換えて，

$$\delta(t - \tau) = e^{-hp(t-\tau)}\left[C_1 \cos p_1(t - \tau) + C_2 \sin p_1(t - \tau)\right] \tag{A-1.7}$$

初期条件として，$t - \tau = 0$ で $\delta(0) = 0$，$\dot{\delta}(0) = v$ とすると，

$C_1 = 0,\quad C_2 = v / p_1$ となり，

$v = P(\tau)d\tau / M = -\ddot{z}(\tau)d\tau$ より，

$$\delta(t - \tau) = -\frac{\ddot{z}(\tau)d\tau}{p_1}e^{-hp(t-\tau)}\sin p_1(t - \tau) \tag{A-1.8}$$

したがって，$0 < \tau \le t$ におけるすべてのパルス状の力積 $P(t)d\tau$ の重ね合わせにより，任意時刻 t での応答変位は以下のように表せます．

$$\delta(t) = -\frac{1}{p_1}\int_0^t \ddot{z}(\tau)e^{-hp(t-\tau)}\sin p_1(t - \tau)d\tau \tag{A-1.9}$$

上式の積分は Duhamel 積分（または畳み込み積分）として知られています．

一般に，$0 < h << 1$ であるので，

$$p_1 \cong p = \frac{2\pi}{T} \tag{A-1.10}$$

とおけば，特定の地盤面での地震加速度記録（$\ddot{z}(t)$）による応答変位（絶対値）の最大値は固有周期Tと減衰定数hを与えると，以下の式で求められます．

$$S_u(T,h)=\frac{T}{2\pi}\left|\int_0^t \ddot{z}(\tau)e^{-h\frac{2\pi}{T}(t-\tau)}\sin\frac{2\pi}{T}(t-\tau)d\tau\right|_{\max} \qquad \text{(A-1.11)}$$

$S_u(T,h)$は，横軸に固有周期Tをとり，縦軸に最大応答変位をとれば，各減衰率hごとのグラフを与え，応答変位スペクトルと呼んでいます．

つぎに，$p_1 \cong p$とし，応答速度に着目すれば，式(A-1.8)を時間tに関する微分することにより，

$$\begin{aligned}\dot{\delta}(t-\tau)&=-\ddot{z}(\tau)d\tau\cdot e^{-hp(t-\tau)}\left[-h\sin p(t-\tau)+\cos p(t-\tau)\right]\\&=-\sqrt{1+\mathrm{h}^2}\,\ddot{z}(\tau)d\tau\cdot e^{-hp(t-\tau)}\left[-\sin\varphi\sin p(t-\tau)+\cos\varphi\cos p(t-\tau)\right]\\&=-\sqrt{1+\mathrm{h}^2}\,\ddot{z}(\tau)d\tau\cdot e^{-hp(t-\tau)}\cos\left[\mathrm{p}(\mathrm{t}-\tau)+\varphi\right]\end{aligned} \qquad \text{(A-1.12)}$$

ここに，$\varphi=\tan^{-1}h$は位相角と呼ばれています．

ところで，減衰定数hが十分に小さく，すなわち$h^2\cong 0$とおけるので，式(A-1.11)より応答速度（絶対値）の最大値は，位相角φの影響を無視すれば，以下のように表せます．

$$S_v(T,h)\approx\left|\int_0^t \ddot{z}(\tau)e^{-h\frac{2\pi}{T}(t-\tau)}\cos\frac{2\pi}{T}(t-\tau)d\tau\right|_{\max} \qquad \text{(A-1.13)}$$

上式の$S_v(T,h)$は，一般に応答速度スペクトルと呼ばれており，固有周期（T）と最大応答速度（$\max\dot{\delta}$）の関係を与えています．

さらに，同様な手順にて，最大応答加速度（絶対値）は，次式のように表せます．

$$S_a(T,h)\approx\frac{2\pi}{T}\left|\int_0^t \ddot{z}(\tau)e^{-h\frac{2\pi}{T}(t-\tau)}\sin\frac{2\pi}{T}(t-\tau)d\tau\right|_{\max} \qquad \text{(A-1.14)}$$

$S_a(T,h)$は加速度応答スペクトルと呼ばれており，固有周期（T）と最大応答か速度（$\max\ddot{\delta}$）の関係を表しています（**回答 4.1** の図 4.1-1(b)参照）．

なお，式(A-1.11)，式(A-1-13)および式(A.1-14)での積分に際しては，通常の地震計による地震加速度データの記録は 0.01 秒程度の間隔でサンプリングされているので，この時間刻みを用いて数値積分するのが一般的であります．

さて，特定の地震についての加速度応答スペクトルは，図 A.1-1(b)に示すように，地震波の周期と固有周期が一致したときに大きな応答値となるジグザクした曲線でありますが，設計に用いる加速度応答スペクトルは特定の地震動に対するものでなく，過去に記録された代表的な地震動に対して得られた加速度応答スペクトルを地盤の種類ごとに統計処理し平滑化したもの（図 4.1-5 および 4.1-6 のような標準加速度応答スペクトル）が設計には適用されています．

以上