補足 A-2　多自由度系の自由振動解析（固有モード解析）

減衰の無い場合の多自由度系の自由振動の運動方程式は，**回答 7.1** での式(7.1-3)により，以下のように表せます．

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{A-2.1}$$

上式の解を，以下のように表わします．

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{X}\mathrm{e}^{ipt} \tag{A-2.2}$$

ここに，：$\mathbf{X}$：振幅を表す変位ベクトル，p：円振動数，$i = \sqrt{-1}$ であり，式(A-2.2)を式(A-4.1)に代入すると，

$$\left(\mathbf{K} - p^2\mathbf{M}\right)\mathbf{X} = \mathbf{0} \tag{A-2.3}$$

上式が $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ 以外の解を持つための条件は，

$$\left|\mathbf{K} - p^2\mathbf{M}\right| = 0 \tag{A-2.4}$$

上式は，p^2 に関する n 次方程式を与え，$\mathbf{K}$ が正値（$\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u} > 0$）であれば，n 個の正根，すなわち

$$p_1^2 \le p_2^2 \le p_3^2 \le \cdots\cdots \le p_n^2 \tag{A-2.5}$$

を持ち，正の平方根 p_i，$i = 1,2,3,.....,n$ は固有円振動数（固有値と呼ぶ）であり，固有周期 T，周波数 f との関係は，

$$T_i = \frac{2\pi}{p_i},\ f_i = \frac{p_i}{2\pi},\ i = 1,2,3,....,n \tag{A-2.6}$$

となります．

つぎに，式(A-2.4)の根である p_i^2 を式(A-2.3)に代入すれば，$\mathbf{X}$ の振幅比のみを規定する n 組のベクトル（固有ベクトルと呼ぶ）：$\mathbf{X}_i$ が定められ，それらを集合した以下の式を得ます．

$$\left[\mathbf{X}\right] = \left[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3 \cdots\cdots \mathbf{X}_n\right] \tag{A-2.7}$$

を与えます．固有ベクトルは固有振動モードを表しており，以下のような性質を持ちます．

いま，任意の２組の固有ベクトル $\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j$，ただし $i \ne j$ を選び，式(A-2.4)に代入すると，

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\mathbf{X}_i &= p_i^2\mathbf{M}\mathbf{X}_i \\ \mathbf{K}\mathbf{X}_j &= p_j^2\mathbf{M}\mathbf{X}_j\end{aligned} \tag{A-2.8}$$

上式の両辺にそれぞれ $\mathbf{X}_i^T, \mathbf{X}_j^T$ を掛ければ，

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_j^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i &= p_i^2\mathbf{X}_j^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_i^T\mathbf{K}\mathbf{X}_j &= p_j^2\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{X}_j\end{aligned} \tag{A-2.9}$$

$\mathbf{K}, \mathbf{M}$ が対称行列であることを考慮し，両式の差をとれば，

$$\left(p_i^2 - p_j^2\right)\mathbf{X}_j^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i^T = 0 \tag{A-2.10}$$

$p_i^2 \ne p_j^2$ であることより，

$$\mathbf{X}_j^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i = 0 \tag{A-2.11}$$

上式から，固有ベクトル（固有振動モード）は質量マトリックスを介して直交していると言えます．

ところで，$\mathbf{X}_i$ は振幅比のみを規定するモード形状を与え，振幅の大きさは不定であります．したがって，任意のスカラー係数 γ_i を $\mathbf{X}_i$ に掛けたベクトルもまた式(A-2.11)を満足していることより，つぎのような固有振動モードを考えます．

$$\mathbf{\Phi}_i = \gamma_i\mathbf{X}_i \tag{A-2.12}$$

すると，

$$\mathbf{\Phi}_j^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i=0\text{，ただし}\, i\neq j \tag{A-2.13}$$

$\mathbf{\Phi}_i$が以下の関係を持つような固有振動モードであるとき，

$$\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i=1,\quad i=1,2,3,\cdots\cdots,n \tag{A-2.14}$$

$\mathbf{\Phi}_i$を規準振動モードと呼んでいます．すなわち，式(A-2.11)を式(A-4.13)に代入すれば，

$$\gamma_i^2\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_i=1 \tag{A-2.15}$$

よって，以下の関係があることがわかります．

$$\gamma_i=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i}} \tag{A-2.16}$$

したがって，式(A-2.12)で与えられる規準振動モードを式(A-2.3)に代入し，式(A-2.14)を考慮すれば，以下の関係を得ます．

$$\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_i=p_i^2\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i=p_i^2 \tag{A-2.17}$$

ところで，道示では，m個の部材要素からなる橋のi次のモード減衰定数(h_i)として，次式を採用しており，

$$h_i=\frac{\sum_{j=1}^{m}h_j\mathbf{\Phi}_{ij}{}^T\mathbf{K}_j\mathbf{\Phi}_{ij}}{\mathbf{\Phi}_i{}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_i} \tag{A-2.18}$$

ここに，$\mathbf{\Phi}_i$はi次の全要素についての規準振動モード，$\mathbf{\Phi}_{ij}$はi次の要素jについての規準振動モード，$\mathbf{K}_j$は要素jの剛性行列であり，要素ごとに減衰定数(h_j)が道示の表－解7.3.1で与えられており，式（A-2.17）はエネルギー減衰定数とも呼ばれています．

さらに，平成24年版では，減衰係数マトリクス$\mathbf{C}$がつぎの形，

$$\mathbf{C}=\alpha\mathbf{M}+\beta\mathbf{K}\text{，ここに，}\alpha\text{，}\beta\text{は正の係数} \tag{A-2.19}$$

で与えられるような Rayleigh 型減衰と呼ばれる式も適用も認めていますので，以下に説明を追加します．

地震変位動：$z=z(t)$，を受けた多自由度系の弾性振動の運動方程式は，すでに回答 7.7 での式(7.7-3)に示したように，

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{R} \tag{A-2.20}$$

ここに，$\mathbf{R}=-\mathbf{M}\cdot\mathbf{I}\cdot\ddot{\mathbf{z}}$であります．

ところで，$i=1,2,3,...,n$個の規準振動モードからなるサイズ($n\times n$)のマトリクス，

$$[\mathbf{\Phi}]=[\mathbf{\Phi}_1\quad \mathbf{\Phi}_2\quad \mathbf{\Phi}_3\quad .....\quad \mathbf{\Phi}_n] \tag{A-2.21}$$

は“モーダルマトルクス”と呼ばれており，式(A-2.13)，式(A-2.14)および式(A-2.16)より，つぎの関係を有しています．

$$[\mathbf{\Phi}]^T\mathbf{M}[\mathbf{\Phi}]=\mathbf{E} \tag{A-2.22}$$

$$[\mathbf{\Phi}]^T\mathbf{K}[\mathbf{\Phi}]=\mathbf{\Lambda} \tag{A-2.23}$$

ここに，$\mathbf{E}$は単位行列，$\mathbf{\Lambda}$は$p_i{}^2$，$i=1,2,3,....,n$からなる対角行列であります．

つぎに，変位ベクトル$\mathbf{u}$を$[\mathbf{\Phi}]$を用いて$\mathbf{q}$に座標変換します．すなわち，

$$\mathbf{u}=[\mathbf{\Phi}]\cdot\mathbf{q} \tag{A-2.24}$$

すると，式(A-2.20)は，

$$\mathbf{M}[\mathbf{\Phi}]\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}[\mathbf{\Phi}]\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}[\mathbf{\Phi}]\mathbf{q}=\mathbf{R} \tag{A-2.25}$$

となり，上式の両辺に$[\mathbf{\Phi}]^T$を掛けると，次式を得

$$[\mathbf{\Phi}]^T\mathbf{M}[\mathbf{\Phi}]\ddot{\mathbf{q}}+[\mathbf{\Phi}]^T\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+[\mathbf{\Phi}]^T\mathbf{K}[\mathbf{\Phi}]\mathbf{q}=[\mathbf{\Phi}]^T\mathbf{R}$$

減衰係数マトリクスが$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$の形で与えられると，式(A-2.22)および(A-2.23)の関係より，

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{q}} + \alpha\mathbf{E}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\Lambda}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{q} = [\boldsymbol{\Phi}]^T \mathbf{R} \tag{A-2.26}$$

$\mathbf{E}$は単位行列，対角要素$p_i^{\,2}$からなる$\boldsymbol{\Lambda}$は対角行列であるので，式(A-2.26)は，$i = 1,2,3,....,n$の規準振動モード$\mathbf{q}$に分解されたｎ組の非連成の微分方程式を与えます．すなわち，

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2h_i p_i \dot{\mathbf{q}} + p_i^{\,2}\mathbf{q} = -\ddot{z}D_i \tag{A-2.27}$$

ここに，$2h_i p_i = \alpha + \beta p_i^{\,2}$，$D_i = \boldsymbol{\Phi}_i^{\,T}\mathbf{M}\cdot\mathbf{I}$であります．$D_i$は地震動の振動モード$i$への寄与率を意味し，一般に刺激係数と呼ばれています．

式(A-2.27)は，振動モードiについての 1 次元の運動方程式であり，その解は，先に示した補足 A-1 のように求められ，標準加速度応答スペクトルにD_i倍したものが利用できます．

ところで,式(A-2.27)での減衰定数h_iは係数α，βに関係しているので,二つの規準振動モード(k,l)での減衰定数(h_k，h_l)を定め，つぎの 2 元連立一次方程式

$$2h_k p_k = \alpha + \beta p_k^{\,2},\quad 2h_l p_l = \alpha + \beta p_l^{\,2} \tag{A-2.28}$$

を解けば，以下の式を得ます．

$$\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} = \frac{2p_k p_l}{p_l^{\,2} - p_k^{\,2}}\begin{bmatrix} p_l & -p_k \\ -1/p_l & 1/p_k\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_k\\ h_l\end{bmatrix} \tag{A-2.29}$$

一般には，刺激係数(D_i)の大きい二つの規準振動モードでの減衰定数（h_k，h_l）を選び，係数α，βを設定する方法が採られており，道示(H24 年版)では，表ー解 7.3.1 の減衰定数の標準値を用いてよいとしています．

以上