補足 A-3　動的解析法

動的解析法として，よく用いられる応答スペクトル法および時刻歴応答解析法の概要を以下に示しておきます．

(1)応答スペクトル法

レベル 1 の地震動に対する耐震性能 1 の照査は，弾性解析によるので，“応答スペクトル法”と呼ばれる解析法が適用できます．この方法の基本は補足 A-2 で説明しましたが，繰り返しますと，前述の**回答** 7.7 での式(7.7-3)で示した n 自由度系の運動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{I}\cdot\ddot{\mathbf{z}} \tag{A-3.1}$$

ここに，$\mathbf{K}$ は弾性剛性行列，の解析に当たって，まず，減衰の無い（$\mathbf{C}=\mathbf{0}$）の自由振動の運動方程式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{A-3.2}$$

に基づき，固有モード解析を行い，n 個の固有値 p_i， $i = 1,2,3,....,n$ とモーダルマトリクス $[\mathbf{\Phi}] = [\mathbf{\Phi}_1 \quad \mathbf{\Phi}_2 \quad \mathbf{\Phi}_3 \quad ..... \quad \mathbf{\Phi}_n]$ を求めます．ついで，式(A-2.28)の変位ベクトルの線形座標変換：$\mathbf{u} = [\mathbf{\Phi}]\cdot\mathbf{q}$ により，式(A-3.2)をつぎにようなｎ組の非連成の常微分方程式

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2h_i p_i \dot{\mathbf{q}} + {p_i}^2 \mathbf{q} = -\ddot{z} D_i \tag{A-3.3}$$

ここに，$2h_i p_i = \alpha + \beta {p_i}^2$，$D_i = {\mathbf{\Phi}_i}^T \mathbf{M}\cdot\mathbf{I}$ で，D_i は地震動の振動モード i への寄与率を意味し，一般に刺激係数と呼ばれています．式(A-3.3)は，入力地震加速度が $\ddot{z}D_i$ での 1 自由度系の強制振動問題であり，その最大応答加速度ベクトル（$\max\ddot{\mathbf{q}}$）の要素 i は，各次数（$i = 1,2,3...,n$）での減衰定数 h_i と固有周期 $T_i = 2\pi / p_i$ を与えれば，補足 A-1 で示した加速度応答スペクトルとして求められます．したがって，D_i の大きな数個の次数 $k = 1,2,..,r$ のみを考慮して，**回答** 4.1 での図 4.1-5 で示したレベル 1 地震に対する標準加速度応答スペクトルを用いて，固有周期 T_k に対する最大応答加速度（$\max\ddot{q}_k$）の D_i 倍したものを求め，減衰定数の補正係数（$c_D = 1.5/(40h_k + 1) + 0.5$）を考慮すれば，設計水平震度（$k_{hk}$）が次数 k ごとに求まり，それらに基づく静定水平荷重（P_{hk}）により橋脚断面の応力（σ_k）および変形量（δ_k）を求め，最後に，σ_k, δ_k， $k = 1,2,..,r$ を重ね合わせればよいが，各次数 k の位相が異なり，単純加算ができないので，通常は，$\sigma = \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2 + ... + {\sigma_r}^2}$，$\delta = \sqrt{{\delta_1}^2 + {\delta_2}^2 + ... + {\delta_2}^2}$ のように近似的に算定されることが多いと思われます．

(2)時刻歴応答解析法

レベル 2 地震動に対する耐震性能 2 または 3 の照査では，非線形問題になるので，補足 A-2 で述べたモーダルアナリシスができなく，入力地震加速度 $\ddot{\mathbf{z}}$ による運動方程式を数値的に解析しなければなりません．すなわち，多自由度系の運動方程式は

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{F} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = -\mathbf{M}\cdot\mathbf{I}\cdot\ddot{\mathbf{z}} \tag{A-3.4}$$

ここに，$\mathbf{F}$ は復元力ベクトルで，変位ベクトル $\mathbf{u}$ との非線形関数によって与えられ，正負交番繰返荷重の下での履歴曲線を適用しなければならなく，多種・多様な構造部材に対する $\mathbf{F}$ の設定には，今日でも不確定な要素がまだ多いように思われます．

非線形時刻歴解析法は，時間（t）を微小時間間隔（Δt）に分割し，地震発生時刻から各時刻 $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, ...$ ごとの応答値を数値時間積分により求めていく方法であります．すなわち，
時刻 t での運動方程式

$$\mathbf{M}\,{}^t\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,{}^t\dot{\mathbf{u}} + {}^t\mathbf{F} = {}^t\mathbf{R} \tag{A-3.5}$$

の解（${}^t\mathbf{u}$）から，時刻 $t + \Delta t$ の運動方程式

$$\mathbf{M}\,{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\,{}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = {}^{t+\Delta}\mathbf{R} \tag{A-3.6}$$

の解（${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$）を求める手法であり，時間に関する以下の差分式

$${}^t\ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t^2}\left\{{}^{t-\Delta t}\mathbf{u} - 2\,{}^t\mathbf{u} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}\right\}, \quad {}^t\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t}\left\{-{}^{t-\Delta t}\mathbf{u} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}\right\} \tag{A-3.7}$$

を用い，式(A−3.3)より，

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}+\frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\cdot{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}={}^{t}\mathbf{R}-{}^{t}\mathbf{F}+\frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\cdot{}^{t}\mathbf{u}-\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M}-\frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)\cdot{}^{t-\Delta t}\mathbf{u} \qquad \text{(A−3.8)}$$

となり，初期条件：${}^{0}\mathbf{u}=\mathbf{0}$，${}^{0}\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{0}$を用い，$t=\Delta t, 2\Delta t. 3\Delta t, ...$での応答変位${}^{t}\mathbf{u}$を順次求めていくことができます．このような方法は，陽解法と呼ばれ，最も簡単な数値時間積分法でありますが，${}^{t}\mathbf{u}, {}^{t-\Delta t}\mathbf{u}$からを${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$を単純に外挿する方法であり，時間間隔$\Delta t$を小さく採らないと解が発散してしまうことより，条件付安定スキームとして知られています.

最もよく用いられている方法は，無条件安定スキームである陰解法であり，その中でニューマークのβ法が最も良く知られています．この方法の概要は，

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}={}^{t}\dot{\mathbf{u}}+\left[(1-\delta){}^{t}\ddot{\mathbf{u}}+\delta{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}\right]\Delta t \qquad \text{(A−3.9)}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}={}^{t}\mathbf{u}+{}^{t}\dot{\mathbf{u}}\Delta t+\left[(1/2-\alpha){}^{t}\ddot{\mathbf{u}}+\alpha{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}\right]\Delta t^2 \qquad \text{(A−3.10)}$$

ここに，δ，αは係数，と表し，式(A−3.9)および(A−4.10)を式(A.3−6)に代入し，${}^{t}\mathbf{u}$，${}^{t}\dot{\mathbf{u}}$および${}^{t}\ddot{\mathbf{u}}$を用いて${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$を求める解法であり，$\delta=1/2$，$\alpha=1/6$の場合は，線形加速度法，$\delta=1/2$，$\alpha=1/4$の場合は，平均加速度法として知られております．これらの数値積分法による解法はコンピュータに頼らねばならなく，ここでは詳細は割愛しますので，専門書を参考にしてください.

なお，コンピュータの発達した今日，多数の解析ソフトが開発されており，複雑な動的非線形解析が可能になっていますが，得られた解析結果の検証には，静的解析結果との比較や複数の解析モデルでの結果との照合など不可欠であるように思われます.

以上