

補足 A-5 幅員の広い上部工を支える単柱式鉄筋コンクリート橋脚の橋軸直角方向の動的解析

図 A-5.1 に示すような、多主桁橋を支える単柱式鉄筋コンクリート橋脚が橋軸直角方向のレベル 1 の地震動を受ける場合を考えます。

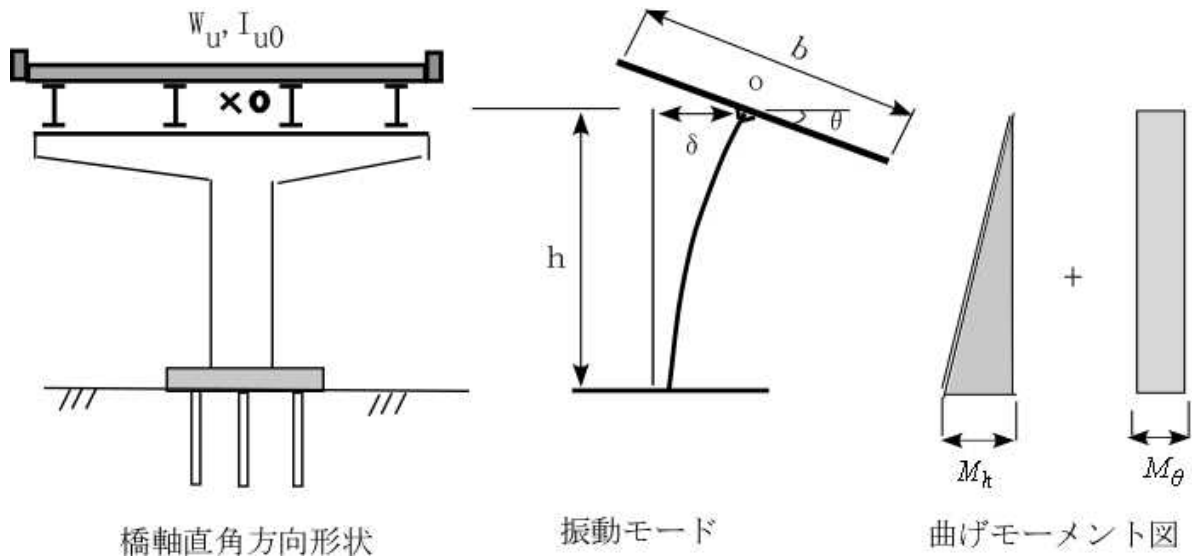


図 A-5.1 単柱式鉄筋コンクリート橋脚の橋軸直角方向の振動モードと曲げモーメント分布

この問題の運動方程式は、以下のように導けます。

上部工の運動エネルギー E は

$$E = \frac{W}{2g} \dot{\delta}^2 + \frac{I_0}{2} \dot{\theta}^2 \quad (\text{A-5.1})$$

ここに、 I_0 は上部構造の重心周りの慣性モーメント、ドットは時間微分を表す。上部構造は通常、橋桁、床版および橋脚の頂版から成り立ち、 I_0 の算定は個々の上部構造に対して行わねばなりません、ここでは簡単のために、図 A-5.2 に示すように、幅 B_0 で、厚さ t_0 の長方形断面で、奥行きが隣接する橋脚間であるような直方体にモデル化できるとすれば、

$$I_0 = \frac{W(B_0^2 + t_0^2)}{12g} \quad (\text{A-5.2})$$

一方、復元力は柱の曲げ剛性に依存し、弾性ひずみエネルギー (U) を橋脚基礎の変形を含めた形で表すならば、上部構造の重心に作用する水平荷重 P および集中モーメント M と変形量との関係は以下のように表され、

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_h & \bar{\delta}_\omega \\ \bar{\theta}_h & \bar{\theta}_\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \quad (\text{A-5.3})$$

ここに、 $\bar{\delta}_h$ と $\bar{\theta}_h$ は単位水平荷重 ($P=1$) を与えたときの水平変位および回転角であり、 $\bar{\delta}_\omega$ と $\bar{\theta}_\omega$ は、単位モーメント ($M=1$) を与えたときの水平変位および回転角であり、相反作用の定理により $\bar{\theta}_h = \bar{\delta}_\omega$ である。したがって、弾性ひずみエネルギー以下のように表せます。

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\delta}_h & \bar{\delta}_\omega \\ \bar{\theta}_h & \bar{\theta}_\omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A-5.4})$$

もし、図 A-5.1 の橋脚が高さ h_0 の等断面 ($EI = \text{const.}$) の片持ちばり形式で、 $h \approx h_0$ と近似すれば、

$$\bar{\delta}_h = h_0^3 / (3EI), \quad \bar{\theta}_h = h_0^2 / (2EI), \quad \bar{\delta}_\omega = h_0^2 / (2EI), \quad \bar{\theta}_\omega = h_0 / (EI) \quad (\text{A-5.5})$$

となります。なお、橋脚が線形弾性体であれば、相反作用の定理により $\bar{\theta}_h = \bar{\delta}_\omega$ となります。

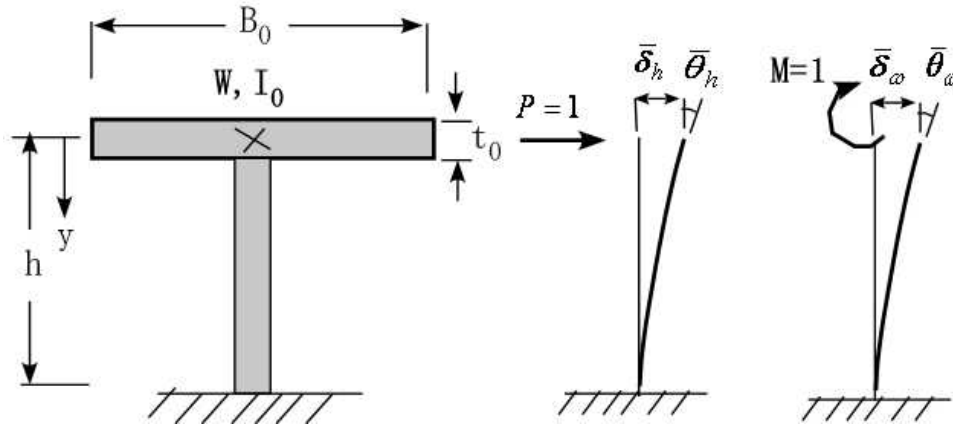


図 A-5.2 橋軸直角方向の単柱式 RC 橋脚の水平振動変位

つぎに、ラグランジュの運動方程式は以下のように与えられます。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{A-5.6})$$

$$L = E - U \quad (\text{A-5.7})$$

式(A-5.1)および(A-5.4)を式(A-5.6)および(A-5.7)に代入すれば、自由振動の運動方程式は

$$\begin{bmatrix} W/g & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\delta}_h & \bar{\delta}_\omega \\ \bar{\theta}_h & \bar{\theta}_\omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-5.8})$$

となります。ここに、

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_h & \bar{\delta}_\omega \\ \bar{\theta}_h & \bar{\theta}_\omega \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{A-5.9})$$

とおけば、剛性行列 \mathbf{K} の各要素は以下のように与えられます。

$$K_{11} = \bar{\theta}_\omega / \Delta, \quad K_{12} = -\bar{\theta}_h / \Delta, \quad K_{21} = -\bar{\delta}_\omega / \Delta, \quad K_{22} = \bar{\delta}_h / \Delta, \quad \Delta = \bar{\delta}_h \bar{\theta}_\omega - \bar{\delta}_\omega \bar{\theta}_h \quad (\text{A-5.10})$$

固有円振動数を p とし、固有振動モードを $\delta = \delta_0 \sin pt$, $\theta = \theta_0 \sin pt$ と表せば、振動数方程式は以下のようになり、

$$\begin{vmatrix} K_{11} - p^2 W/g & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - p^2 I_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A-5.11})$$

よって、

$$\frac{WI_0}{g} p^4 - (K_{11}I_0 + K_{22} \frac{W}{g}) p^2 + K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21} = 0 \quad (\text{A-5.12})$$

から、二つの固有円振動数 p_1 , p_2 は以下のように与えられます。

$$p_1 = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (\text{A-5.13})$$

ここに、 $a = WI_0/g$, $b = K_{11}I_0 + K_{22}W/g$, $c = K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}$ とおいており、固有周期で表すと、

$$T_1 = \frac{2\pi}{p_1}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{p_2} \quad (\text{A-5.14})$$

となります。

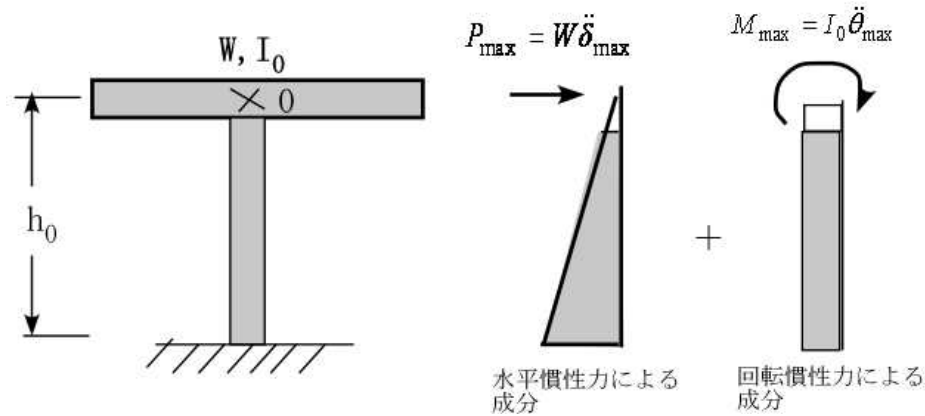


図 A-5.3 橋脚の曲げモーメント図

橋脚の曲げモーメント図の概形を図 A-5.3 に示しますが、水平慣性力による成分と回転慣性力による成分の和として表れ、水平振動モードと回転振動モードには位相差があり、単純に加算することはできませんが、1 次固有振動モードに基づく静的解析による照査は、上部構造の回転慣性の影響を無視しており、柱に現われる曲げモーメントを過小評価していることに留意しなければなりません。

つぎに、図 A-5.1 の橋脚が地盤面で水平地震加速度 (\ddot{z}) を受けた場合の運動方程式は、式(A-5.8) および(A-5.9)より、以下のように与えられます。

$$\begin{bmatrix} W/g & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} = -\frac{W}{g} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-5.15})$$

ここに、 \mathbf{C} : 減衰行列、 \mathbf{K} : 剛性行列であります。

レベル1 地震動に対する耐震性能1の照査に対しては、弾性振動問題として取り扱えるので、[補足 A-2](#) で示したモーダルアナリシスにより、二つの規準振動モードに分解し、標準加速度応答スペクトルを用いた応答値の重ね合わせる方法（“[応答スペクトル法](#)”）によって橋脚断面の応力の最大弾性応答値を求めることができます。なお、応答スペクトル法の概要は、[補足 A-3](#) に示しています。

レベル2 地震動による耐震性能照査に対して、式(A-5.15)の中の剛性行列 (\mathbf{K}) が弾塑性非線形履歴特性を持ちますので、モーダルアナリシスができなく、時刻歴非線形応答解析による数値積分法に頼らねばなりません。なお、時刻歴非線形応答解析の概要は、[補足 A-3](#) に述べています。

以上